УДК 514.18

ВИЗНАЧЕННЯ ГРАДІЄНТА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ, ЗАДАНОГО НА ПЛОСКІЙ НЕВПОРЯДКОВАНІЙ МНОЖИНІ ТОЧОК

Черняк В.І., к.т.н.
Кременецький лісотехнічний коледж (Україна)

В роботі розглядається спосіб визначення градієнта дискретного скалярного поля, заданого на невпорядкованій множині точок.

Ключові слова: градієнт, дискретне скалярне поле, тріангуляція.

Постановка проблеми. Розглянемо умови і метод визначення градієнта скалярного поля засобами MATLAB.

Нехай маємо аналітично задане скалярне поле $u = -x^2 - y^2 + 2$. Необхідно визначити градієнт поля в точці (2,3).

Градієнт у класичній теорії поля в даній точці визначається за формулою [1]

$$grad\boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} = -2x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} = -2 \cdot 2\boldsymbol{i} - 2 \cdot 3\boldsymbol{j} = -4\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} \quad (1)$$

Основна умова визначення градієнта засобами MATLAB – векторне поле повинне бути задане дискретно на прямокутній монотонній сітці (тобто на однозначній монотонно зростаючій або спадній), можна і на нерівномірній сітці.

Засобами MATLAB координати градієнта поля в вершині сітки U_5 (рис. 1, а) визначаються за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_6 - U_4}{X_2 - X_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_2 - U_8}{Y_2 - Y_1}. \quad (2)$$

У випадку рівномірної сітки з кроком $h_X=h_Y=1$, наприклад, координати шуканої точки $X_0=2$, $Y_0=3$, координати суміжних вузлів сітки $X_1=1$, $X_2=3$, $Y_1=2$, $Y_2=4$, величина поля у вузлах сітки

$$U_4 = -X_1^2 - Y_0^2 + 2 = -1^2 - 3^2 + 2 = -8;$$

$$U_6 = -X_2^2 - Y_0^2 + 2 = -3^2 - 3^2 + 2 = -16;$$

$$U_8 = -X_0^2 - Y_1^2 + 2 = -2^2 - 2^2 + 2 = -6;$$

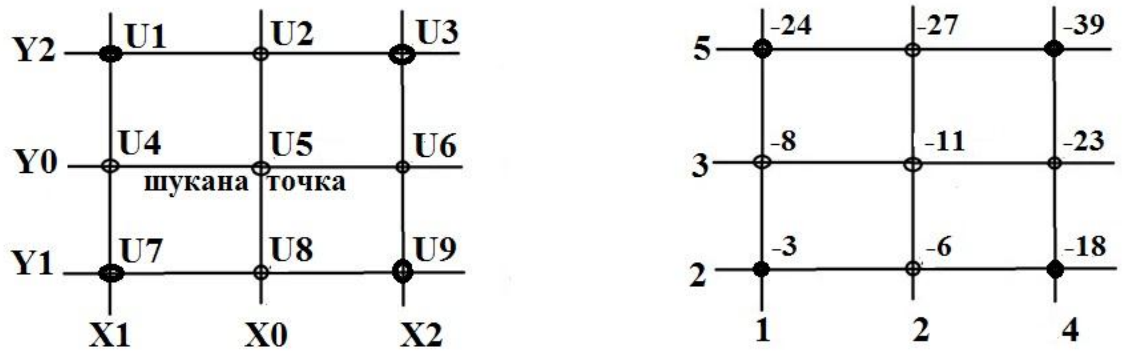
$$U_2 = -X_0^2 - Y_2^2 + 2 = -2^2 - 4^2 + 2 = -18.$$

Координати градієнта поля в заданій точці

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_6 - U_4}{X_2 - X_1} = \frac{-16-(-8)}{3-1} = -4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_2 - U_8}{Y_2 - Y_1} = \frac{-18-(-6)}{4-2} = -6,$$

що відповідає координатам, визначеним за формулою (1).



а) б)

Рис.1. Фрагмент скалярного поля на прямокутній сітці:
а) координати сітки; б) значення координат на нерівномірній сітці

У випадку нерівномірної сітки , наприклад $X_0=2$, $Y_0=3$, $X_1=1$, $X_2=4$, $Y_1=2$, $Y_2=5$ (рис. 1, б)

$$U_4 = -X_1^2 - Y_0^2 + 2 = -1^2 - 3^2 + 2 = -8;$$

$$U_6 = -X_2^2 - Y_0^2 + 2 = -4^2 - 3^2 + 2 = -23;$$

$$U_8 = -X_0^2 - Y_1^2 + 2 = -2^2 - 2^2 + 2 = -6;$$

$$U_2 = -X_0^2 - Y_2^2 + 2 = -2^2 - 5^2 + 2 = -27.$$

Координати градієнта поля в заданій точці

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_6 - U_4}{X_2 - X_1} = \frac{-23-(-8)}{4-1} = -5;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_2 - U_8}{Y_2 - Y_1} = \frac{-27-(-6)}{5-2} = -7,$$

не відповідають координатам, визначеним аналітично за формулою (1).

У випадку, коли скалярне поле, задане на невпорядкованій множині точок, даний метод взагалі не можна застосовувати.

Тому виникає необхідність розробки методу визначення градієнта дискретного скалярного поля, заданого довільно.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В працях [2,3] при визначенні контурів зображень на кольорових зображеннях градієнт обчислюється за різницевими формулами:

$$G_X = (U_7+2U_8+U_9) - (U_1+2U_2+U_3), \qquad (3)$$
$$G_Y = (U_3+2U_6+U_9) - (U_1+2U_4+U_7).$$

Обидві ці величини легко обчислюються з допомогою згортки зображень з двома масками Собеля [2, 3]

$$G_{Y=}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}*U \quad G_X=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}*U.$$

Також часто використовуються маски оператора Превітта [3]

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{і} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

і Щарра [3]

$$\begin{bmatrix}3 & 10 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -3 & -10 & -3\end{bmatrix} \text{і} \begin{bmatrix}3 & 0 & -3\\ 10 & 0 & -10\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

Визначимо значення градієнта скалярного поля $u = -x^2 - y^2 + 2$ в точці (2,3), при умові, що це поле задано на нерівномірній сітці (рис.1, б), з використанням вище вказаних масок.

Маска Собеля: $\boldsymbol{G_X} = -60$, $\boldsymbol{G_Y} = -84$.

Маска Превітта: $\boldsymbol{G_X} = -45$, $\boldsymbol{G_Y} = -63$.

Маска Щарра: $\boldsymbol{G_X} = -240$ **,** $\boldsymbol{G_Y} = -336$.

Як видно, значення координат градієнта не відповідають значенням, обчисленим аналітично за формулами (1).

Формулювання цілей статті. Метою статті є розробка способу визначення градієнта дискретного скалярного поля, заданого на невпорядкованій множин точок.

Основна частина. Згідно [1] *швидкість зміни скалярного поля по заданому напряму рівна скалярному добутку градієнта цього поля на одиничний вектор даного напрямку.*

$$\frac{du}{ds} = grad\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau}.$$

В нашому випадку для скалярного поля **u**(**r**(x,y)) (рис. 2) при визначені градієнта в точці $\mathbf{r_0}$

$$du = u_1 - u_0 \;;\; ds = |r_1 - r_0| \;;\; \boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_0}}{ds}, \qquad (4)$$

де du – зміна значення скалярного поля **u** по заданому напряму;

ds – довжина ділянки поля по заданому напряму;

τ – одиничний вектор даного напрямку.

Алгоритм визначення градієнта **g** скалярного поля *u*, заданого на невпорядкованій множині ***r***, для точки $\mathbf{r_0}$, ґрунтується на вище вказаному твердженні і має такий вигляд.

1. Для заданої множини точок скалярного поля виконуємо тріангуляцію Делоне.

2. Визначаємо трикутники, інцидентні вершині $\mathbf{r_0}$ (рис. 3).
3. Складаємо матриці для визначення градієнта

$$B = \left| \begin{matrix} \dfrac{u_1 - u_0}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0|} \\ \dfrac{u_2 - u_0}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0|} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{u_5 - u_0}{|\boldsymbol{r}_5 - \boldsymbol{r}_0|} \end{matrix} \right| \quad A = \left| \begin{matrix} \dfrac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0|} \\ \dfrac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0|} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\boldsymbol{r}_5 - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}_5 - \boldsymbol{r}_0|} \end{matrix} \right|.$$

Фактично отримано систему лінійних рівнянь

$$A*g=B.$$

4. Розв’язком даної системи і будуть координати вектора градієнта $\mathbf{g}$ в точці $\mathbf{r_0}$.

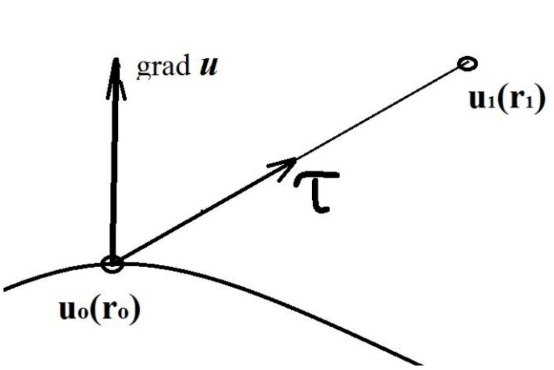


Рис. 2. До визначення градієнта в класичній теорії

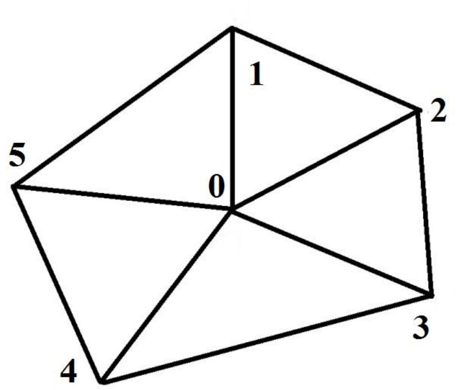


Рис. 3. Трикутники, інцидентні вершині $\mathbf{r_0}$

Оскільки матриця **A** в більшості випадків є прямокутною, то при розв’язку цієї системи рівнянь використовується QR-розкладання [4].

Тестові розрахунки показали, що найбільша похибка при визначені градієнта виникає на крайніх вершинах сітки (вершинах ребер, які належать тільки одному трикутнику). Тому в цих вершинах градієнт визначається методом інтерполяції поверхнею 2-порядку за значеннями у 10-ти найближчих внутрішніх вершинах.

В таблиці 1 наведено похибки визначення градієнта різних скалярних полів розробленим способом і засобами MATLAB по відношенню до класичного методу. Тестування проводилось на монотонній нерегулярній сітці. Верхнє число показує похибку по координаті $\boldsymbol{x}$, нижнє – по $\boldsymbol{y}$. Тестування обох способів на прямокутних регулярних сітках показало похибки приблизно рівні нулю.

Висновки. Запропоновано спосіб визначення градієнта дискретного скалярного поля, заданого на плоскій невпорядкованій множині точок. Проведено аналіз точності визначення в порівнянні з існуючими способами.

Таблиця 1

Похибка визначення градієнта різними способами

Скалярне поле	Градієнт за класичним способом	Похибка, %	
		Засоби Matlab	Розроблений спосіб
u=**c*r** **c**=(2,1) – постійний вектор	**grad u** =2**i**+1**j**	12 22	0 0
$u=x^2-y^2$	**grad u** =2x**i** – 2y**j**	3.5 2.4	1.2 0.8
u=5x+2y+y*cos(x)	**grad u** =(5-y*sin(x))**i** + (2+cos(x))**j**	4.6 10.8	0.6 0.8

Література

1. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля / И.А.Гольдфайн. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 132 с.
2. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.
3. Алгоритмы выделения контуров зображений [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://habrahabr.ru/post/114452/ .
4. Потемкин В.Г. Вычисления в среде MATLAB / В.Г. Потемкин. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2004. – 720 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ, ЗАДАНОГО НА ПЛОСКОМ НЕУПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК

Черняк В.И.

В работе рассматривается способ определения градиента дискретного скалярного поля, заданного на неупорядоченном множестве точек.

Ключевые слова: градиент, дискретное скалярное поле, триангуляция.

DETERMINING THE GRADIENT OF THE SCALAR FIELD, DEFINED ON AN PLANAR DISORDERED SET OF POINTS

V. Chernyak

We consider the method of determining the gradient of the discrete scalar field defined on disordered sets of points.

Keywords: gradient, discrete scalar field, triangulation.