УДК 519.24(075.8)

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ В СИСТЕМІ ЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Єремєєв В.С., д.т.н.,
Кузьмінов В.В.,
Попазов М.В.
Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Богдана Хмельницького (Україна)

Розглянуто математичну модель коливань в системі зв'язаних лінійних осциляторів. Розроблено алгоритм обчислення часової залежності відхилень і швидкості коливань кожного осцилятора під дією зовнішньої сили. Для проведення розрахунків розроблена програма на алгоритмічній мові C++ Builder 2009 програмної збірки CodeGear RAD Studio 2009.

Ключові слова: алгоритмічна мова, диференціальні рівняння, коливання, модель, програма, система осциляторів, осцилятор.

Постановка проблеми. Коливальні процеси дуже розповсюджені у природі та техніці. Коливання відбуваються у мікро та макросвіті, їх джерелом можуть служити збудження у електромагнітних, гравітаційних полях. Коливання виникають, зокрема, в будь яких механічних системах, які мають стійке положення рівноваги при разовому або періодичному впливі зовнішньої сили. Не дивно, що зараз теорія коливань є досить великою галуззю знань сучасної фізики [1].

Теорія коливань знаходить величезне застосування. Внаслідок того, що зараз існує велика кількість програмних оболонок, які дозволяють реалізувати чисельні алгоритми моделювання коливальних процесів у складних механічних системах, реалізація таких алгоритмів є актуальною задачею.

Використання сучасних математичних методів в теоретичних дослідженнях коливальних процесів дозволяє розширити клас задач. Зокрема, моделювання одновимірних поздовжніх коливань в ланцюгу пружинних маятників має велике прикладне значення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Коливання з одним ступенем свободи вивчені досить детально [2]. На практиці часто доводиться мати справу з системою взаємодіючих між собою тілами. Прикладом таких систем служить ланцюжок математичних маятників, пов'язаних між собою пружиною, або коливання атомів у твердих тілах. Система з 2 осциляторів вивчалася в багатьох публікаціях [3], [4]. Аналіз проблеми для системи з n осциляторів проведено в роботі [3], де показано, що аналітичне рішення досить складно навіть для n=3-4, а при n>4 – практично неможливо. З іншого боку, при досить великому n задача зводиться до розв'язання хвильового рівняння для суцільного твердого тіла, яке розглянуто в багатьох роботах [5]. Проміжний випадок системи з відносно невеликим числом осциляторів залишається мало дослідженим, тому проведення робіт у цьому напрямку має теоретичний інтерес. Розглянута робота присвячена моделюванню коливальних процесів у ланцюжку з n лінійних осциляторів.

Формування цілей статті. Нехай є система пов'язаних пружинних осциляторів (рис. 1) із зовнішньою збуджуючою силою, відомі початкові відхилення від відповідних положень рівноваги та швидкості. Закон збуджуючої сили представляє собою суму s гармонік:

$$F(t)=\sum_{i=1}^{s} A_i \sin(\omega_i t+\varphi_i). \qquad (1)$$

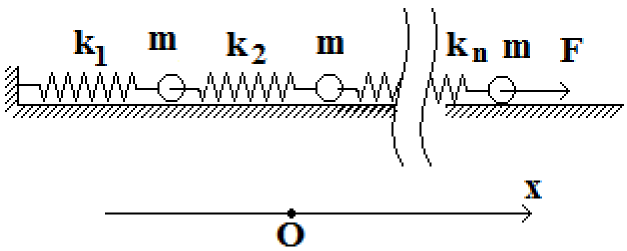

Рис.1. Система *n* пружинних осциляторів із зовнішньою збуджуючою силою

Необхідно у заданому інтервалі часів визначити відхилення та швидкості мас. Математичну модель коливального процесу представимо у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \dfrac{1}{m}\left(k_i(x_{i-1}-x_i)+k_{i+1}(x_{i+1}-x_i)+\delta_n^i \sum_{j=1}^{s} A_j \sin(\omega_j t+\varphi_j)\right) \\ x_0=0, x_{n+1}=0, k_{n+1}=0 \\ i=1,\dots,n \end{cases}, \qquad (1)$$

де δ_i^j - символ Кронекера: δ_i^j=0 при *i j*, δ_i^j=*1* при *i=j*.

Початкові умови представимо у вигляді: $x_i(0)=x_{i0}, v_i(0)=v_{i0}$. Аналітичне рішення рівняння (1) не представляється можливим. Мета нашого дослідження полягає в отриманні чисельного розв'язку.

Основна частина.

1. ***Рішення системи диференціальних рівнянь.*** Нехай на відрізку $[x_0, x_0+X]$ потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y^{/} = f(x,y), \tag{2}$$

при умові: $y(x_0)=y_0$, $f(x,y)$ – будь-яка аналітична у точці (x_0, y_0) функція.

Виконавши диференціювання (2) по x, отримаємо співвідношення

$$y^{//} = f_x(x,y) + f_y(x,y)y^{/},$$

$$y^{///} = f_{xx}(x,y) + 2f_{xy}(x,y)y^{/} + f_{yy}(x,y)y^{/2} + f_y(x,y)y^{//}.$$

Підставивши $x=x_0$ та $y=y_0$ у (2) та в останні співвідношення, матимемо значення $y^{/}(x_0), y^{//}(x_0), y^{///}(x_0), \ldots$.

Таким чином, має місце наближена рівність:

$$y(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i . \tag{3}$$

При $|x-x_0|$ більшому за радіус збіжності ряду

$$\sum_i \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i ,$$

похибка (3) не є нескінченно малою при $n \to \infty$ й запропонований метод незастосовний.

Наближену формулу можна отримати у такий підхід [6]. Виконаємо розбиття відрізку $[x_0, x_0+X]$ на відрізки $[x_{j-1}, x_j]$, $j=1,\ldots, N$. Будемо послідовно отримувати наближення y_i до значень розв'язку $y(x_j)$, $j=1,\ldots, N$ за таким правилом. Вважаючи значення y_i відомим, обчислимо значення y точці x_j похідних $y_j^{(i)}$ розв'язку вихідного диференціального рівняння, якому належить точка (x_j, y_j). На відрізку $[x_{j-1}, x_j]$ вважатимемо

$$y(x) \approx z_j(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j^{(i)}}{i!}(x-x_j)^i , \tag{4}$$

беремо

$$y_{j+1} = z_j(x_{j+1}). \tag{5}$$

Нехай x_{j+1}- $x_j \equiv h$ (тотожньо). Якщо б значення дискретного ряду співпадали б із точними значеннями $y(x_j)$, то похибка від заміни y_{j+1} на $z_i(x_{j+1})$ мала би порядок $O(h^{n+1})$. Так як ми вносимо похибку на $O(h^{-1})$ відрізках, очевидно, що при зменшенні кроку сітки буде вірним співвідношення

$$\max_{0 \le j \le N} | y_j - y(x_j) | = O(h^n).$$

У ряді випадків такого роду міркування приводять до хибного висновку про наявність факту збіжності наближеного рішення до точного. Однак крім апроксимації еквіваленту рівняння на точному рішенні для збіжності необхідне й стійкість еквіваленту до похибок, що вносяться при кожному обчисленні. Строге обґрунтування збіжності методів при зменшенні кроку складається з обґрунтування стійкості та апроксимації й має велике теоретичне й практичне значення.

Згідно цього методу обчислюються значення функції f і всіх її похідних $f_{x^j y^{m-j}}$, при *m<n*, тобто, обчислюються *n(n+1)/2* значень різних функцій. Це потребує при великих n написання великої кількості блоків обчислення похідних.

Отримані методи відносяться до сімейства методів Рунге-Кута [7] й будуються у такий спосіб. У процесі обчислень фіксуються числа

$$\alpha_2,\ldots,\alpha_q,\quad p_1,\ldots,p_q,\quad \beta_{ij},0<j<i\le q,$$

і послідовно можна записати

$$\begin{aligned} &k_1(h)=hf(x,y),\\ &k_2(h)=hf(x+\alpha_2 h,y+\beta_{21}k_1(h)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\\ &k_q(h)=hf(x+\alpha_q h,y+\beta_{q,1}k_1(h)+\ldots+\beta_{q,q-1}k_{q-1}(h)) \end{aligned}$$

припустивши

$$y(x+h)\approx z(h)=y(x)+\sum_{i=1}^{q}p_i k_i(h).$$

У даній роботі для розв’язання системи рівнянь було використано векторний аналог останньої сукупності формул:

$$k_1=\tau F(t,v),k_2=\tau F(t+\frac{\tau}{2},z+\frac{k_1}{2}),\quad k_3=\tau F(t+\frac{\tau}{2},z+\frac{k_2}{2}),$$

$$k_4=\tau F(t+\tau,z+k_3),\qquad \Delta z=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$

де τ - крок часу *t*, *z* – вектор координат та швидкостей усіх мас, *F* – вектор-функція – права частина системи (1).

Ці формули можна отримати згідно підходу, викладеному у [6].

2. ***Чисельна реалізація математичної моделі.***

Для проведення розрахунків розроблена програма на алгоритмічній мові C++ Builder 2009 програмної збірки CodeGear RAD Studio 2009. Програма дозволяє моделювати коливальний процес у системі з n осциляторів під дією зовнішнього навантаження. На екран дисплея можна виводити наступні характеристики:

– тимчасова залежність відхилення будь–якого осцилятора від первісного значення;

– тимчасова залежність швидкості руху будь–якого осцилятора від первісного значення;

– залежність швидкості руху від переміщення (фазовий портрет);

– тимчасова залежність швидкості руху будь–якого осцилятора від первісного значення;

– максимальне відхилення обраного осцилятора від початкового положення значення;

– максимальне відхилення від початкового положення того осцилятора, відхилення якого є найбільшою із системи всіх осциляторів;

– максимальна відстань між двома сусідніми осциляторами.

Висновки. У роботі сформульована система диференціальних рівнянь для опису коливань n пов'язаних лінійних осциляторів під дією зовнішніх сил. Використання часової залежності діючої сили у вигляді кінцевого ряду Фур'є дозволяє моделювати практично будь-який закон навантаження. Алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь реалізований за допомогою мови C++ Builder 2009 програмної оболонки CodeGear RAD Studio 2009. Створена програма дозволяє дослідити закономірності коливального процесу в мало вивченої області з 4-8 і більше лінійними осциляторами. Зокрема, практичний інтерес мають наступні завдання:

1) побудова фазового портрета для окремих осциляторів;

2) визначення умов навантаження, при яких досягається максимальна відстань між двома сусідніми осциляторами. Саме в цих точках буде діяти максимальне навантаження на зв'язуючу ланку.

Запропонований метод розв'язання поставленої задачі може бути використаний при моделюванні впливу сил тертя і демпфуючих пристроїв на характер коливальних процесів в багатоелементних системах.

Література

1. Савельев И.В. Курс общей физики, том I. Механика, молекулярная физика и термодинамика / И.В. Савельев. – М.: КНОРУС, 2012. – 528 с.
2. Мандельштам Л.И. Лекции по колебаниям/ Л.И. Мандельштам. – М.: «Наука», 1972. – 471с.
3. Трубецков Д.И. Линейные колебания и волны. Учеб. пособие/ Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 416 с.

4. Брежнев О.В. Проблема моделювання коливальних процесів в одновимірних кристалах з використанням математичних маятників / О.В. Брежнев, В.С. Єремєєв, В.В. Кузьмінов // Збірник наук. праць.: «Інформаційні технології в освіті та науці».– Мелітополь: Видавництво МДПУ, 2016. – Випуск 8. – С.53-57.
5. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: 1999. – 799 с.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: «Наука», 1978. – 512 с.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином, 2000. – С. 363-375.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Еремеев В.С., Кузьминов В.В, Попазов Н.В.

Рассмотрена математическая модель колебаний в системе связанных линейных осцилляторов. Разработан алгоритм вычисления временной зависимости отклонений и скорости колебаний каждого осциллятора под действием внешней вынуждающей силы. Для проведения расчётов создана программа на алгоритмическом языке С++ Builder 2009 программной сборки CodeGear RAD Studio 2009.

Ключевые слова: алгоритмический язык, дифференциальные уравнения, колебания, модель, программа, система осцилляторов, осциллятор.

MODELING OF OSCILLATORY PROCESSES IN THE SYSTEM OF LINEAR OSCILLATORS

Eremeev V., Kuzminov V., Papazov N.

The mathematical model of oscillations in coupled oscillators. Developed an algorithm for computing the time dependency of the deviation and the speed of oscillation of each oscillator under the action of external forces. For settlements created the program in algorithmic language C++ Builder 2009 build software CodeGear RAD Studio 2009.

Keywords: algorithmic language, differential equations, oscillation, model, program, the system of oscillators, oscillator.