

УДК 514.18

## ВІДНЕСЕННЯ КУЛІ ДО ІЗОМЕТРИЧНИХ КООРДИНАТ НА ОСНОВІ СФЕРИЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

Кремець Т.С., к.т.н.,

Грищенко І.Ю., к.т.н.,

Несвідоміна О.В., аспірант\*

*Національний університет біоресурсів і природокористування  
України (Україна, м. Київ)*

*В роботі розглянуто способи віднесення поверхні кулі до різних ізометричних сіток. Для отримання таких сіток знаходиться сферичне відображення мінімальних поверхонь, які також віднесені до ізометричних координат. Достовірність отриманих результатів підтверджується першою квадратичною формою поверхні кулі для кожної ізометричної сітки.*

*Ключові слова: поверхня кулі, мінімальна поверхня, ізометрична сітка координатних ліній, сферичне відображення.*

*Постановка проблеми.* У випадку аналітичного опису поверхні параметричними рівняннями у функції двох незалежних змінних сітка координатних ліній в загальному випадку є косокутною. Інколи вдається перейти до такого аналітичного опису поверхні, при якому сітка координатних ліній стає ортогональною. При цьому спрощується перша квадратична форма поверхні – середній її член стає рівним нулеві. Для окремого класу поверхонь можна ще більше спростити першу квадратичну форму, віднісши їх до ізометричних координат. При цьому крайні члени першої квадратичної форми стають рівними, а нескінченно малий елемент сітки перетворюється у квадрат. Такий координатний запис поверхні зручний для практичного використання, зокрема, для конформного відображення геометричних елементів на поверхню, а також нанесення на неї плоских рисунків [1, 2].

*Аналіз останніх досліджень і публікацій.* Клас поверхонь, які допускають віднесення їх до ізометричних координат, дуже обмежений. Площину теж можна відносити до різного роду криволінійних координат, які утворюють ізометричну сітку. Це дозволяє конформно перетворювати зображення (лінії, написи,

---

\* Науковий керівник – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф.

рисунки) на площині [3, 4]. До поверхонь, які можуть бути віднесені до ізометричних координат, відносяться поверхні обертаня. Проте серед них тільки деякі допускають перехід до такого аналітичного опису. Існує ряд праць [5-7], присвячених відшукуванню ізометричних координат на поверхнях обертаня.

**Формулювання цілей статті.** Метою статті є відшукування способів віднесення поверхні кулі до різних ізометричних сіток координатних ліній.

**Основна частина.** Відомо, що сферичне відображення мінімальної поверхні, віднесеної до ізометричних координат, утворює ізометричну сітку як на мінімальній поверхні, так і на сферичному відображенні, тобто на кулі. Знайдемо ці сітки для катеноїда, заданого параметричними рівняннями:

$$X = \cosh u \cos v; \quad Y = \cosh u \sin v; \quad Z = -u, \quad (1)$$

де  $u, v$  – незалежні змінні поверхні.

Знайдемо першу квадратичну форму катеноїда (1). Для цього запишемо частинні похідні рівнянь (1):

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X}{\partial u} = \sinh u \cos v; & Y_u &= \frac{\partial Y}{\partial u} = \sinh u \sin v; & Z_u &= \frac{\partial Z}{\partial u} = -1; \\ X_v &= \frac{\partial X}{\partial v} = -\cosh u \sin v; & Y_v &= \frac{\partial Y}{\partial v} = \cosh u \cos v; & Z_v &= \frac{\partial Z}{\partial v} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (1) запишуться:

$$\begin{aligned} E &= X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2 = \cosh^2 u; \\ F &= X_u \cdot X_v + Y_u \cdot Y_v + Z_u \cdot Z_v = 0; \\ G &= X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2 = \cosh^2 u. \end{aligned} \quad (3)$$

Отже перша квадратична форма катеноїда має вигляд:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \cosh^2 u (du^2 + dv^2). \quad (4)$$

Рівність крайніх коефіцієнтів у квадратичній формі (4) свідчить про те, що катеноїд віднесено до ізометричних координат.

Тепер знайдемо сферичне відображення катеноїда, яким є множина одиничних нормалей його поверхні, що виходять із однієї точки. Нормаль до поверхні катеноїда (1) знайдемо із векторного добутку векторів, дотичних до координатних ліній. Ці вектори є частинними похідними (2) рівнянь (1). Векторний добуток векторів (2) знаходимо із визначника:

$$N = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = \{ \cosh u \cos v; \cosh u \sin v; \sinh u \cosh u \}. \quad (5)$$

Приведемо вектор (5) до одиничного. Для цього кожен складову

розділимо на корінь квадратний із суми квадратів складових вектора (5) і отримаємо проекції одиничного вектора на осі координат:

$$X = \operatorname{sech} u \cos v; \quad Y = \operatorname{sech} u \sin v; \quad Z = \tanh u. \quad (6)$$

Вирази (6) є параметричними рівняннями кулі одиничного радіуса. Знайдемо першу квадратичну форму для кулі, описаної рівняннями (6). Частинні похідні запишуться:

$$\begin{aligned} X_u &= -\operatorname{sech} u \tanh u \cos v; & Y_u &= -\operatorname{sech} u \tanh u \sin v; & Z_u &= \operatorname{sech}^2 u; \\ X_v &= -\operatorname{sech} u \sin v; & Y_v &= \operatorname{sech} u \cos v; & Z_v &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (6) запишуться:

$$\begin{aligned} E &= X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2 = \operatorname{sech}^2 u; \\ F &= X_u \cdot X_v + Y_u \cdot Y_v + Z_u \cdot Z_v = 0; \\ G &= X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2 = \operatorname{sech}^2 u. \end{aligned} \quad (8)$$

Отже перша квадратична форма кулі має вигляд:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \operatorname{sech}^2 u (du^2 + dv^2). \quad (9)$$

Запишемо параметричні рівняння гвинтового коноїда, на який згинається катеноїд:

$$X = -\sinh u \sin v; \quad Y = \sinh u \cos v; \quad Z = v. \quad (10)$$

Якщо повторить всі зазначені операції по відношенню до рівнянь (10) гвинтового коноїда, то можна перекоонатися, його квадратична форма, сферичне відображення і квадратична форма сферичного відображення такі ж як і для катеноїда не дивлячись на те, що частинні похідні коноїда будуть відрізнятися від частинних похідних катеноїда. Отже сферичне відображення катеноїда і коноїда однакове, причому можна показати, що воно не змінюється при згинанні катеноїда в коноїд. На рис. 1 зображений відсік катеноїда, гвинтового коноїда, та їх спільного сферичного відображення при однакових межах зміни параметрів  $u$  і  $v$ .

Розглянемо іншу мінімальну поверхню – поверхню Еннепера. Її параметричні рівняння мають вигляд:

$$X = v(1 - u^2 + v^2/3); \quad Y = u(1 - v^2 + u^2/3); \quad Z = -2uv. \quad (11)$$

Перша квадратична форма поверхні (11) має вигляд:

$$dS^2 = (1 + u^2 + v^2)(du^2 + dv^2). \quad (12)$$

За запропонованим алгоритмом знаходимо параметричні рівняння сферичного відображення поверхні (11):

$$X = -\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}; \quad Y = -\frac{2v}{1 + u^2 + v^2}; \quad Z = 1 - \frac{2}{1 + u^2 + v^2}. \quad (13)$$

Перша квадратична форма кулі (13) має вигляд:



Розглянемо ще одну мінімальну поверхню, в рівняння якої входить стала величина  $\beta$ , і яка впливає на форму поверхні [8]:

$$\begin{aligned} X &= e^{u \cos \beta} [\sinh u \cos(v \cos \beta) \sin v + \cosh u \sin(v \cos \beta) \cos v]; \\ Y &= e^{u \cos \beta} [\sinh u \cos(v \cos \beta) \cos v - \cosh u \sin(v \cos \beta) \sin v]; \\ Z &= e^{u \cos \beta} \sin(v \cos \beta) \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (15)$$

Перша квадратична форма поверхні (15) має вигляд:

$$dS^2 = e^{2u \cos \beta} (\cosh u + \cos \beta \sinh u)^2 (du^2 + dv^2). \quad (16)$$

Сферичне відображення та його перша квадратична форма описуються виразами:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sin \beta \cos v}{\cosh u + \cos \beta \sinh u}; \\ Y &= -\frac{\sin \beta \sin v}{\cosh u + \cos \beta \sinh u}; \\ Z &= -\frac{\sinh u + \cos \beta \cosh u}{\cosh u + \cos \beta \sinh u}. \end{aligned} \quad (17)$$

$$dS^2 = \frac{\sin^2 \beta}{(\cosh u + \cos \beta \sinh u)^2} (du^2 + dv^2). \quad (18)$$

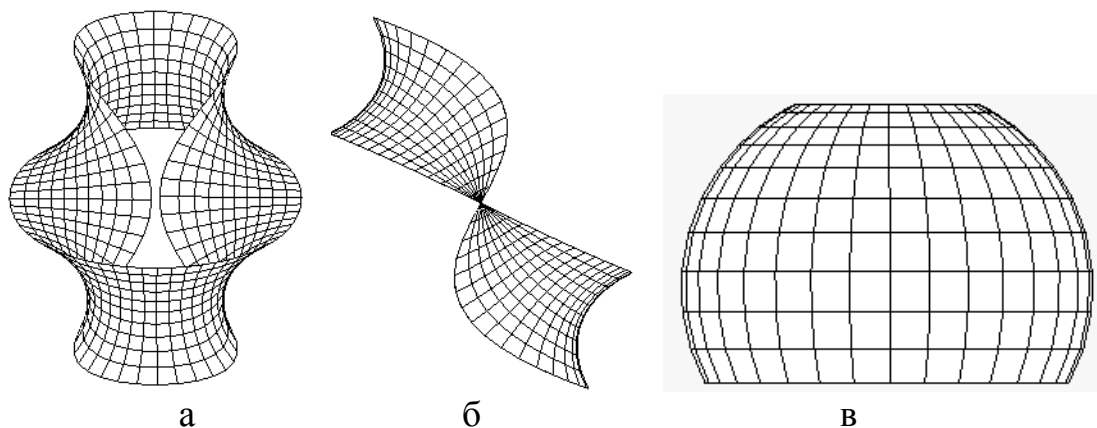


Рис. 3. Графічні ілюстрації до побудови сферичного відображення відсіку мінімальної поверхні (15) при  $\beta = \pi/3$ :

- а) фронтальна проекція відсіку поверхні;
- б) профільна проекція відсіку поверхні;
- в) сферичне відображення відсіку поверхні

На рис. 3 зображено відсік поверхні (15) та її сферичного відображення (17) при значенні сталої  $\beta = \pi/3$ . Цікаво, що при  $\beta = \pi/2$  поверхня (15) перетворюється у коноїд, а її сферичне відображення (17) приймає форму (6). При  $\beta = 0$  поверхня (15) перетворюється у площину, віднесену до ізометричної сітки полярної системи координат. Таким чином, рівняння (15) описують широкий спектр

мінімальних поверхонь в залежності від значення сталої  $\beta$ , починаючи із площини і закінчуючи гвинтовим коноїдом.

**Висновки.** Сферичним відображенням мінімальних поверхонь, віднесених до ізометричних координат, є поверхня кулі, яка теж віднесена до ізометричних координат. Це дає можливість відносити кулю до різноманітних ізометричних сіток шляхом аналітичного опису сферичного відображення мінімальних поверхонь. Сферичне відображення різних мінімальних поверхонь може бути віднесене до ізометричної сітки із паралелей і меридіанів кулі при різних параметричних рівняннях її аналітичного опису.

### *Література*

1. Кремець Т.С. Автоматизація переходу від прямокутних до ізометричних сіток на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Т.С. Кремець, О.В. Несвідоміна // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук праць. – Мелітополь: МДПУ, 2016. – Вип. 5. – С. 88–92.
2. Несвідомин В.Н. Способ аналитического отображения плоских изображений на криволинейные поверхности / В.Н. Несвідомин, Т.С. Пилипака, Т.С. Кремець // MOTROL. Commission of motorization and energetics in agriculture. –Vol 16. Lublin-Preszow. - № 3. -2014. – С. 58–65.
3. Несвідомін В.М. Відображення прямих і кривих ліній на плоску ізометричну сітку полярної системи координат та конструювання із них візерунків / В.М. Несвідомін, Т.С. Кремець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 285 – 290.
4. Несвідомін В.М. Відображення написів на плоскі ізотермічні сітки / В.М. Несвідомін, Т.С. Кремець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – Вип. 4, т. 48. – С. 15–21.
5. Несвідомін В.М. Конструювання поверхонь обертання, віднесених до ізометричних сіток координатних ліній / В.М. Несвідомін, Т.С. Кремець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 271–276.
6. Кремець Т.С. Відшукання ізометричних сіток на деяких поверхнях обертання / Т.С. Кремець // Тези доповідей Ії конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та інноваційна діяльність». – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – Вип. 1. – С. 82–84.
7. Пилипака Т.С. Аналітичний пошук поверхонь обертання, віднесених до ізометричних координат / Т.С. Пилипака,

І.Ю. Грищенко, Т.С. Кременець // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія: техніка та енергетика АПК / Редкол.: Д.О.Мельничук (відп. ред.) та ін. – К., 2012. – Вип. 170, ч. 2. – С. 231–239.

8. Муквич М.М. Конструювання мінімальних поверхонь за допомогою ізотропної кривої, яка лежить на конусі / М.М. Муквич // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". – Луцьк, видавництво Луцького національного технічного університету, 2015. – № 48. – С. 155–158.

### **ОТНЕСЕНИЕ СФЕРЫ К ИЗОМЕТРИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ НА ОСНОВАНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Кременец Т.С., Грищенко И.Ю., Несвидомина А.В.

*В работе рассматриваются способы отнесения поверхности шара к разным изометрическим сетям. Для получения таких сетей находится сферическое отображение минимальных поверхностей, которые тоже отнесены к изометрическим координатам. Достоверность полученных результатов подтверждается первой квадратичной формой поверхности сферы для каждой изометрической сети.*

*Ключевые слова: поверхность сферы, минимальная поверхность, изометрическая сеть координатных линий, сферическое отображение.*

### **ALLOCATION OF SERVICES TO THE BASIS ISOMETRIC COORDINATES ON THE SPHERICAL MAPPING OF MINIMAL SURFACES**

Kremetz T., Grischenko I., Nesvidomina A.

*In work modes of reference of a surface of a full-sphere to different isometric webs are considered. For deriving of such webs there is a spherical map of minimal surfaces which too are referred to isometric co-ordinates. Reliability of the received outcomes proves to be true the first quadratic form of a surface of an orb for each isometric web.*

*Keywords: an orb surface, a minimal surface, an isometric web of co-ordinate lines, spherical map.*