

УДК 514.18

АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ, ЯКІ ЛЕЖАТЬ НА ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ЛОГАРИФМІЧНОЇ СПІРАЛІ

Муквич М.М., к.т.н.*

Національний університет біоресурсів і природокористування
України (м. Київ)

У роботі здійснено аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання логарифмічної спіралі, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній.

Ключові слова: мінімальна поверхня, ізометрична сітка координатних ліній, лінійний елемент поверхні, ізотропна крива, логарифмічна спіраль.

Постановка проблеми. Мінімальні поверхні мають найменшу площу у порівнянні з іншими поверхнями, які проходять через задану замкнену лінію. Напруженість у кожній точці мінімальної поверхні – постійна, тому геометрична форма мінімальних поверхонь забезпечує рівномірний розподіл зусиль в оболонках [1, с. 43].

При дослідженні геометрії архітектурних конструкцій з мінімальними поверхнями найчастіше використовують варіаційні, графічні, варіаційно-різницеві методи, які приводять до аналітичного опису поверхонь, близьких до мінімальних, що утруднює аналіз їх геометричних та технологічних властивостей [2, с. 158]. Тому важливою проблемою неперервного геометричного моделювання є розробка методів аналітичного опису мінімальних поверхонь.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Серед сучасних досліджень слід вирізнити роботи із узагальнення аналітичного опису мінімальної поверхні за заданою її спеціальною лінією та різноманітними додатковими умовами (задача Е. Бйорлінга (E.G. Björling) [3, 4]; із вирішення практичних задач конструювання поверхонь архітектурних оболонок [5, 6] та розробки ефективних чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних, до яких приводить задача аналітичного опису мінімальних поверхонь [5, 6, 7].

Особливе місце займають методи аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної,

* Науковий консультант – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф

які дозволяють знайти параметричні рівняння поверхонь. Аналітичний опис неперервного каркасу мінімальних поверхонь пов'язаний із знаходженням параметричних рівнянь ізотропних ліній нульової довжини [8]. Побудову мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є реалізовано у дисертаційному дослідженні [9]. Дана робота присвячена реалізації метода аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній. Можливість уведення ізометричних параметрів для поверхонь залишається не доведеною [10, с. 96], тому вказаний метод потребує дослідження для окремих поверхонь обертання.

Формулювання цілей статті. Знайти аналітичний опис поверхні обертання логарифмічної спіралі, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній та ізотропних ліній, що лежать на її поверхні. Використовуючи аналітичний опис ізотропних ліній знайти параметричні рівняння мінімальних поверхонь та приєднаних до них мінімальних поверхонь.

Основна частина. Розглянемо поверхню обертання, параметричні рівняння якої мають вигляд:

$$X(\tau; \nu) = \varphi(\tau) \cdot \cos \nu; \quad Y(\tau; \nu) = \varphi(\tau) \cdot \sin \nu; \quad Z(\tau; \nu) = \psi(\tau), \quad (1)$$

де $\varphi = \varphi(\tau)$; $\psi = \psi(\tau)$ – параметричні рівняння меридіана поверхні обертання.

У роботі [11] наведено алгоритм відшукування параметричних рівнянь меридіана поверхні обертання, при якому поверхня буде віднесена до ізометричної сітки координатних ліній. Перехід від ортогональної до ізометричної сітки координат здійснюється за допомогою введення нової змінної t яка пов'язана із змінною τ наступним чином [11]:

$$t = \int \frac{\sqrt{(\varphi'_\tau)^2 + (\psi'_\tau)^2}}{\varphi} d\tau. \quad (2)$$

Розглянемо поверхню обертання логарифмічної спіралі, яку задано параметричними рівняннями:

$$X(\tau; \nu) = e^{\sqrt{3}\tau} \cdot \sin \tau \cdot \cos \nu; \quad Y(\tau; \nu) = e^{\sqrt{3}\tau} \cdot \sin \tau \cdot \sin \nu; \quad (3)$$

$$Z(\tau; \nu) = e^{\sqrt{3}\tau} \cdot \cos \tau,$$

де $\tau \in [0; 2\pi)$; $\nu \in [0; 2\pi)$.

Визначивши, згідно (2), умову переходу до ізометричної сітки координатних ліній $\tau(t) = 2 \operatorname{arctg} \left(e^{\frac{t}{2}} \right)$, отримаємо параметричні рівняння поверхні обертання логарифмічної спіралі, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній:

$$\begin{aligned}
 X(t;v) &= e^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{e^2}\right)} \cdot \operatorname{sech}\frac{t}{2} \cdot \cos v; & Y(t;v) &= e^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{e^2}\right)} \cdot \operatorname{sech}\frac{t}{2} \cdot \sin v; \\
 Z(t;v) &= -e^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{e^2}\right)} \cdot \operatorname{th}\frac{t}{2}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Розкладемо на множники вираз лінійного елемента поверхні (4), що визначає довжину будь-якої кривої, яка лежить на його поверхні:

$$ds^2 = e^{4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{e^2}\right)} \cdot \left(\operatorname{sech}\frac{t}{2}\right)^2 \cdot (dv - i \cdot dt)(dv + i \cdot dt), \tag{5}$$

де i – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримуємо:

$$v = i \cdot t + C \quad \text{або} \quad v = -i \cdot t + C, \tag{6}$$

де C – довільна стала інтегрування.

При підстановці виразу $v = i \cdot t + C$ у рівняння (4) для кожного значення C отримуємо параметричні рівняння уявної ізотропної лінії, яка лежить на поверхні обертання логарифмічної спіралі:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{e^2}\right)} \cdot \operatorname{sech}\frac{t}{2} \cdot \cos(i \cdot t + C); \\
 y(t) &= e^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{e^2}\right)} \cdot \operatorname{sech}\frac{t}{2} \cdot \sin(i \cdot t + C); & z(t) &= -e^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{e^2}\right)} \cdot \operatorname{th}\frac{t}{2}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здійснимо для функцій (7) заміну: $t = u + i \cdot v$. Відокремивши дійсну та уявну частину, отримуємо рівняння мінімальної поверхні (C – довільна стала):

$$\begin{aligned}
 X(u,v) &= \frac{2e^\alpha}{\operatorname{ch}u + \cos v} \left[\operatorname{ch}u \cdot \cos(C - v) \left(\operatorname{ch}\frac{u}{2} \cdot \cos\frac{v}{2} \cdot \cos\beta + \operatorname{sh}\frac{u}{2} \cdot \sin\frac{v}{2} \cdot \sin\beta \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{sh}u \cdot \sin(C - v) \left(\operatorname{ch}\frac{u}{2} \cdot \cos\frac{v}{2} \cdot \sin\beta + \operatorname{sh}\frac{u}{2} \cdot \sin\frac{v}{2} \cdot \cos\beta \right) \right]; \\
 Y(u,v) &= \frac{2e^\alpha}{\operatorname{ch}u + \cos v} \left[\operatorname{ch}u \cdot \sin(C - v) \left(\operatorname{ch}\frac{u}{2} \cdot \cos\frac{v}{2} \cdot \cos\beta + \operatorname{sh}\frac{u}{2} \cdot \sin\frac{v}{2} \cdot \sin\beta \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{sh}u \cdot \cos(C - v) \left(\operatorname{ch}\frac{u}{2} \cdot \cos\frac{v}{2} \cdot \sin\beta - \operatorname{sh}\frac{u}{2} \cdot \sin\frac{v}{2} \cdot \cos\beta \right) \right]; \\
 Z(u,v) &= \frac{e^\alpha}{\operatorname{ch}u + \cos v} (\sin v \cdot \sin\beta - \cos\beta \cdot \operatorname{sh}u),
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{де: } \alpha = \alpha(u; v) = \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{u}{2}} \cos \frac{v}{2}}{1 + e^{\frac{u}{2}} \sin \frac{v}{2}} + \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{u}{2}} \cos \frac{v}{2}}{1 - e^{\frac{u}{2}} \sin \frac{v}{2}} \right); \quad (9)$$

$$\beta = \beta(u; v) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ln \left(\frac{1 + e^u + 2e^{\frac{u}{2}} \sin \frac{v}{2}}{1 + e^u - 2e^{\frac{u}{2}} \sin \frac{v}{2}} \right);$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$X^*(u, v) = \frac{2e^\alpha}{\operatorname{ch} u + \operatorname{cos} v} \left[\operatorname{ch} u \cdot \operatorname{cos}(C - v) \left(\operatorname{ch} \frac{u}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{v}{2} \cdot \sin \beta - \operatorname{sh} \frac{u}{2} \cdot \sin \frac{v}{2} \cdot \operatorname{cos} \beta \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} u \cdot \sin(C - v) \left(\operatorname{ch} \frac{u}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{v}{2} \cdot \sin \beta + \operatorname{sh} \frac{u}{2} \cdot \sin \frac{v}{2} \cdot \sin \beta \right) \right];$$

$$Y^*(u, v) = \frac{2e^\alpha}{\operatorname{ch} u + \operatorname{cos} v} \left[\operatorname{ch} u \cdot \sin(C - v) \left(\operatorname{ch} \frac{u}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{v}{2} \cdot \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sh} \frac{u}{2} \cdot \sin \frac{v}{2} \cdot \operatorname{cos} \beta \right) + \right. \quad (10) \\ \left. + \operatorname{sh} u \cdot \operatorname{cos}(C - v) \left(\operatorname{ch} \frac{u}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{v}{2} \cdot \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sh} \frac{u}{2} \cdot \sin \frac{v}{2} \cdot \sin \beta \right) \right];$$

$$Z^*(u, v) = \frac{e^\alpha}{\operatorname{ch} u + \operatorname{cos} v} (\sin v \cdot \operatorname{cos} \beta + \sin \beta \cdot \operatorname{sh} u),$$

де вирази $\alpha = \alpha(u; v)$; $\beta = \beta(u; v)$ визначаються із (9).

На рис.1 (а, б) зображено відсіки мінімальної та приєднаної мінімальної поверхні, побудованих за рівняннями (8) і (10) відповідно при $C = 0$; $u \in [0, 5; \dots \pi]$; $v \in [\pi; \dots 4, 4]$.

Вираз лінійного елемента поверхні (4) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2 = e^{4\sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{e^2} \right)} \cdot \left(\operatorname{sech} \frac{t}{2} \right)^2 \cdot (dt - i \cdot dv)(dt + i \cdot dv). \quad (11)$$

Підставивши вирази $t = i \cdot v + C$ або $t = -i \cdot v + C$, отримані із (11), у параметричні рівняння поверхні (4), отримаємо рівняння двох інших сімей уявних ізотропних кривих. Для кожного значення C за допомогою знайдених ізотропних кривих можна побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них, які характеризуються спільними метричними властивостями та спільними властивостями кривини поверхні.

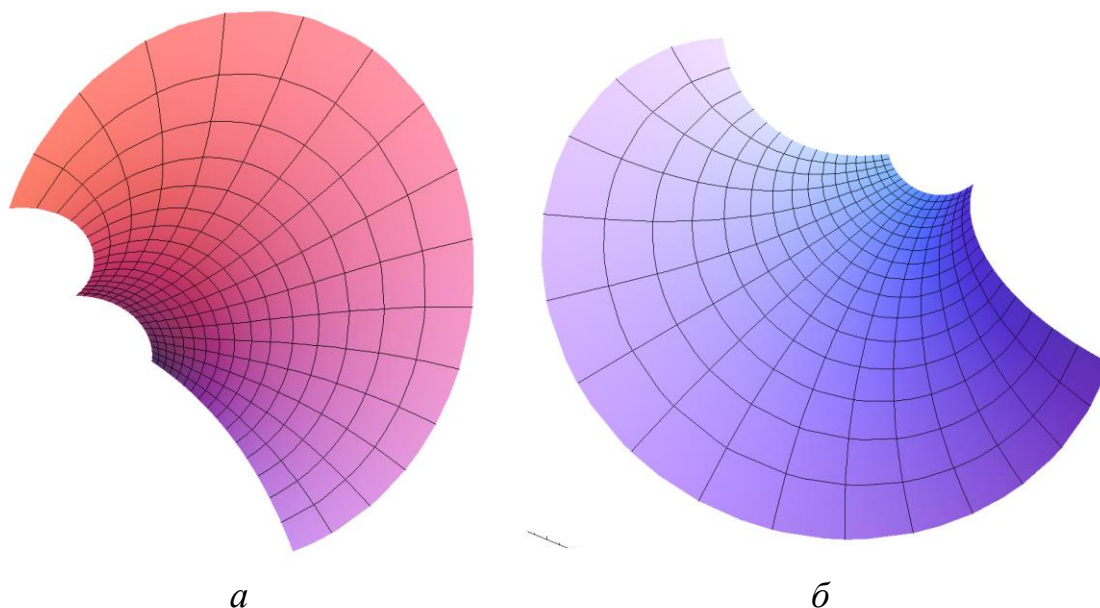


Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь:

- а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (8);
 б) відсік приєднаної поверхні, побудованої за рівняннями (10)

Висновки. На поверхні обертання логарифмічної спіралі, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, для кожного значення C можна побудувати чотири сім'ї ізотропних кривих, і кожній кривій поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні.

Література

1. Михайленко В.Е. Конструирование форм современных архитектурных конструкций / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалёв. – Киев: Будівельник, 1978. – 112 с.
2. Расчёт оболочек сложной формы / [Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В.]. – К.: Будівельник, 1990. – 192 с.
3. Cintra A.A. The Björling problem for minimal surfaces in a Lorentzian three-dimensional Lie group / A.A. Cintra, F. Mercuri, I.I. Onnis // Ann. Mat. Pura Appl. – 2016. – 195(1). P.95–110.
4. Lira J.H. A Weierstrass representation for minimal surfaces in 3-dimensional manifolds / J.H. Lira, M. Melo, F. Mercuri // Results Math. – 2011. – 60(1). – P.311–323.
5. Пульпинский Я.С. Некоторые задачи оптимизации формы оболочек вращения / Я.С. Пульпинский // Актуальные проблемы современного строительства: Сб. трудов. Серия: Строительные конструкции. – Пенза: ПГАСА, 2003. – С. 99-108.

6. Абдюшев А.А. Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности / А.А. Абдюшев, И.Х. Мифтахутдинов, П.П. Осипов // Известия КазГАСУ. – 2009. – №2(12). – С. 86-92.
7. Гацунаев М.А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения миним. поверхности /М.А.Гацунаев, А.А.Клячин // Уфимский математич. журнал. Т. 6. – 2014. – №3. – С. 3–16.
8. Фиников С.П. Теория поверхностей / Фиников С.П. –Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
9. Аушева Н.М. Геометричне моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: 05.01.01 / Н. М. Аушева. – К.: КНУБА, 2014. – 38 с.
10. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и миним. поверхности / Курант Р. – Пер. с англ. – М., 1953. – 311 с.
11. Несвидомин В.Н. Способ аналитического отображения плоских изображений на криволинейные поверхности / В.Н. Несвидомин, Т.С. Пилипака, Т.С. Кремец // «MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture».– Vol. 16, No 3. – Lublin – Rzeszov, 2014. – С. 58 – 65.

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ
ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ,
ЛЕЖАЩИХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ
ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СПИРАЛИ**

Муквич Н.Н.

В работе осуществлено аналитическое описание минимальных поверхностей с помощью изотропных линий, которые лежат на поверхности вращения логарифмической спирали, отнесенной к изометрическим координатам.

Ключевые слова: минимальная поверхность, изометрическая сеть координатных линий, линейный элемент поверхности, изотропная кривая, логарифмическая спираль.

**ANALYTICAL DESCRIPTION OF MINIMAL SURFACES USING
ISOTROPIC CURVED, LYING ON THE ROTATIONAL
SURFACE OF THE LOGARITHMIC SPIRAL**

Mukvich N.

The paper considers an analytical description of the minimal surfaces with isotropic curves that lie on the surface of rotation of the logarithmic spiral, referred to the isometric grid of the coordinate lines.

Key words: minimal surface, isometric grid of the coordinate lines, linear element of a surface, isotropic curve, logarithmic spiral.