

УДК 515.2

## ПОВОДЖЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХОМОЇ ЧАСТКИ УСЕРЕДИНИ ЕЛІПТИЧНОГО БІЛЬЯРДА

Сидоренко О.С., к.т.н.,

Сімонова О.Г., к.т.н.,

Шеліхова І.Б., к.т.н.

*Національний технічний університет**«Харківський політехнічний інститут» (Україна)*

*В роботі досліджено поведження траєкторій умовної частки усередині еліптичного більярда, використовуючи поняття фазового портрету, що дозволило здійснити «унаочнення» всієї множини траєкторій одночасно. Конструювання фазового портрету еліптичного більярда виконано з використанням поняття перетину Пуанкаре [5].*

*Ключові слова: еліптичний більярд, фазовий портрет, перетин Пуанкаре, унаочнення траєкторій, комп'ютерний експеримент.*

**Постановка проблеми.** Фундаментальна оптична властивість еліпса полягає у тому, що точкова, яка рухається усередині еліптичного більярда, вийшовши з одного фокуса еліпса, після пружного зіткнення з границею більярда обов'язково пройде через інший фокус. Відомо [1], що траєкторія частки після кожного наступного зіткнення з еліпсом буде усе сильніше «притискатися» до його великої осі. Але комп'ютерні експерименти свідчать інше, демонструючи роль значущих цифр в обчисленнях, та надаючи приклад нестійкості обчислювальних процесів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Спрямуємо частку з нижньої частини еліпса через правий фокус (рис. 1). Послідовно проходячи через фокуси, частка наблизатиметься до великої осі еліпса. Можна оцінити швидкість цього наближення [1]. Нехай  $a$  і  $b$  - півосі еліпса і  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  - відстань від центра до фокуса. З рис. 1 видно, що прямокутні криволінійні трикутники LMF і NPF приблизно подібні, і їхній коефіцієнт подібності

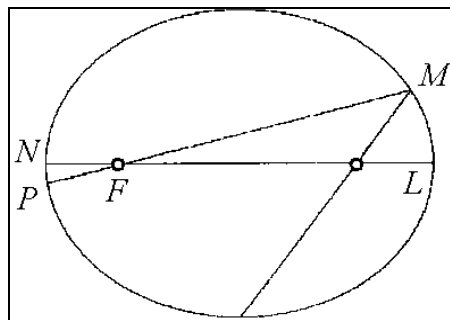


Рис. 1. Початкові ланки фокального більярда

оцінюється як  $k = \frac{LF}{NF} = \frac{a+c}{a-c}$ . Коефіцієнт  $k$  визначає швидкість наближення частки до великої осі еліпса: при кожному проходженні більярда відхилення частки від великої осі теоретично повинно зменшуватися в  $k$  разів.

Але це не підтверджують комп'ютерні експерименти, де обчислення виконувалися з підвищеною точністю. На рис. 2 і 3 наведено приклади побудови за складеною в середовищі Maple програми траси еліптичного більярда, коли обчислення виконувалися з точністю Digits=100 і Digits=300 (тобто значущими числами).

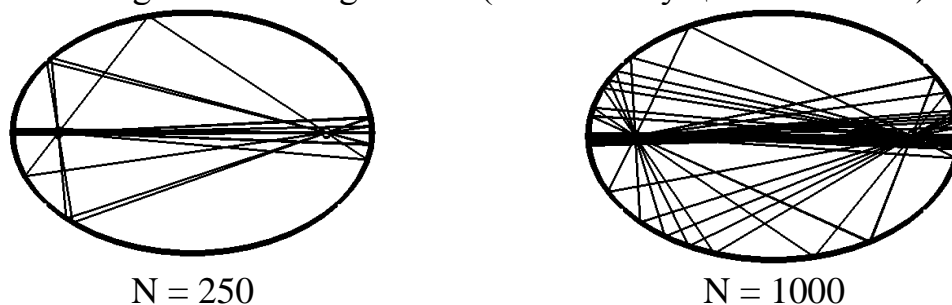


Рис. 2. Трасування фокального еліптичного більярда з Digits = 100

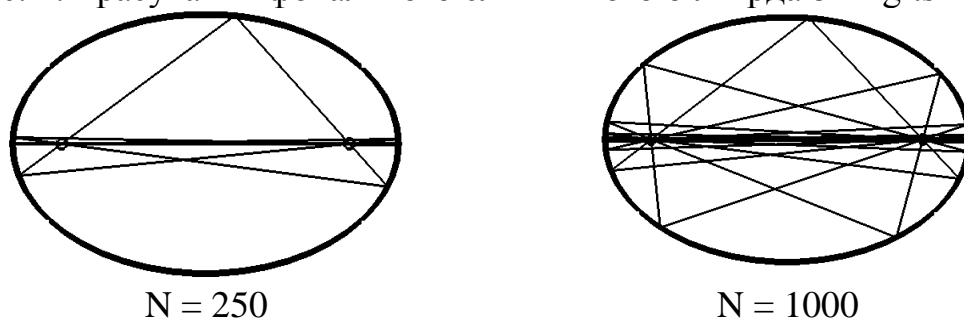


Рис. 3. Трасування фокального еліптичного більярда з Digits = 300

**Формулювання цілей статті.** Використовуючи поняття фазового портрету дослідити загальний випадок поведінки траєкторій умовної частки усередині еліптичного більярда, що дозволить здійснити «унаочнення» всієї множини траєкторій одночасно. Конструювання фазового портрету еліптичного більярда виконати з на базі поняття перетину Пуанкаре [5].

**Основна частина.** На кожному з попередніх рисунків (рис. 2 і рис. 3) було зображено лише одну з можливих траєкторій в еліптичному більярді. Очевидно, що при спробі зобразити на одному рисунку кілька траєкторій вони б накладалися одна на одну, і рисунок би втратив інформативність. Використовуючи поняття фазового портрету розробимо загальний погляд на поведінку траєкторій частки усередині еліптичного більярда, де з'являється можливість «побачити» всі траєкторії одночасно.

Для більярдних систем перетин Пуанкаре [5] вводиться

традиційно: потрібно простежити за траєкторією частки тільки в моменти її зіткнення з границею більярда. Через  $(x_n, y_n)$  позначимо координати послідовних точок зіткнення. За цими точками траєкторія відновлюється однозначно, адже усі вони лежать на границі більярда, тому задовольняють співвідношенню

$$\frac{x_n^2}{a^2} + \frac{y_n^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Нехай частка рухається за інерцією, зіткнення є пружними, тому вектор її швидкості  $\bar{V}_n = (u_n, v_n)$  має постійну величину ( $|\bar{V}_n| = 1$ ).

$$u_n^2 + v_n^2 = 1. \quad (2)$$

Закони збереження (1) і (2) не є специфічними лише для еліптичного більярда, їх можна записати і для будь-якого іншого більярда, помітивши, що (1) - це рівняння границі. Однак для еліптичного більярда уздовж траєкторії виконується унікальний закон збереження, що має вигляд [2]:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{(xv - yu)^2}{a^2 b^2} = const. \quad (3)$$

Використовуючи співвідношення (1) і (2), для перетину Пуанкаре цей закон збереження вже можна записати у вигляді:

$$\frac{x_n u_n}{a^2} + \frac{y_n v_n}{b^2} = const. \quad (4)$$

У формулі (4) ліворуч маємо проекцію поля нормалей до еліпса  $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$  на напрямок траєкторії, заданий одиничним вектором  $\bar{V}_n = (u_n, v_n)$ . Співвідношення (1) задає на площині  $(x, y)$  еліпс, співвідношення (2) задає на площині  $(u, v)$  коло. Співвідношення (4) містить і координати точки зіткнення  $(x_n, y_n)$ , і координати вектора швидкості  $(u_n, v_n)$ .

Введемо кутові параметри  $t$  і  $\varphi$ ,  $-\pi < t, \varphi < \pi$ , поклавши  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $u = \cos \varphi$ ,  $v = \sin \varphi$ . Тоді співвідношення (1) і (2) будуть виконуватися автоматично, а (4) перейде в

$$\frac{\cos t \cos \varphi}{a} + \frac{\sin t \sin \varphi}{b} = const, \text{ або} \\ (a + b) \cos(t - \varphi) - (a - b) \cos(t + \varphi) = C, \quad (5)$$

де  $C$  - постійна (своя для кожної траєкторії).

Таким чином, у просторі з координатами  $(t, \varphi)$  точка  $(t_n, \varphi_n)$ , що відповідає точці відображення  $(x_n, y_n)$  і векторові швидкості перед зіткненням  $(u_n, v_n)$ , рухається по лініях рівня функції

$$F(t, \varphi) = (a + b) \cos(t - \varphi) - (a - b) \cos(t + \varphi). \quad (6)$$

На рис. 4 наведено графік функції  $F$ , який нагадує дно коробки для яєць, витягнутої «в північно-східному» напрямку, який збігається з фазовим портретом еліптичного більярда [6].

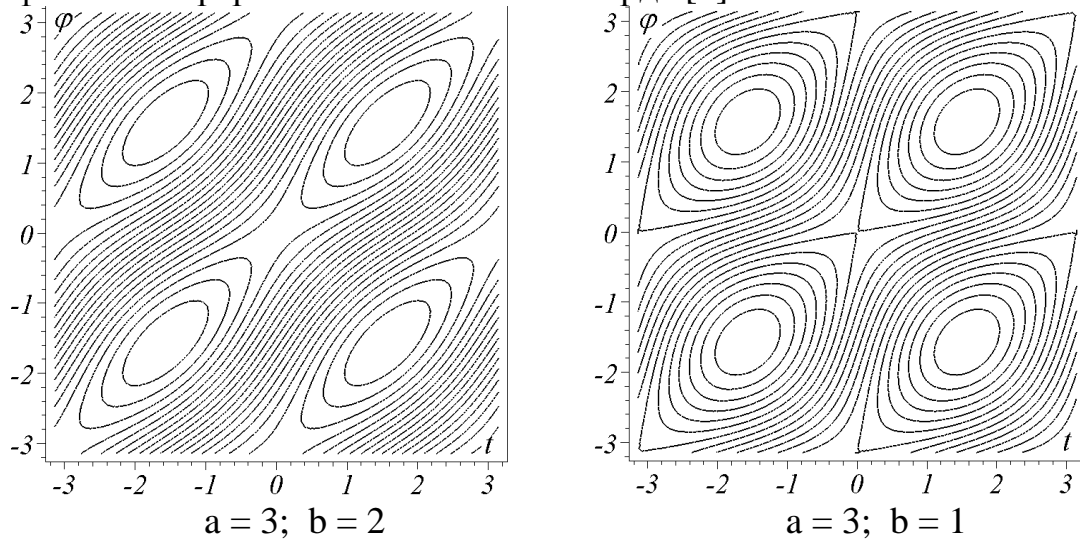


Рис. 4. Лінії рівня функції  $F(t, \varphi)$ , в залежності від параметрів еліпса  $a$  і  $b$

Картину ліній рівня функції  $F$  представлено на рис. 4, можна отримати в результаті наступного комп'ютерного експерименту. З нижньої точки еліпса в декількох напрямках необхідно «запустити» більярдні частки. Для кожної частки протягом тривалого часу на площині  $(t, \varphi)$  слід відзначити точки  $(t_n, \varphi_n)$ . Можна переконатися, що для кожної траєкторії ці точки укладаються уздовж гладких кривих, що і є лініями рівня функції  $F$ .

Зазначимо, що отримані криві заповнюють рівно половину квадрата  $[-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi)$ . Це зв'язано з тим, що вектор швидкості  $(u_n, v_n)$  не може бути довільним, а повинний складати гострий кут з напрямком зовнішньої нормалі до границі більярда. Дві точки з координатами  $(\pi/2, \pi/2)$  і  $(-\pi/2, -\pi/2)$  відповідають частці, яка рухається уздовж малої осі еліптичного більярда. Симетричні овали, що оточують ці точки, являють собою траєкторії, які увесь час перетинають відрізок між фокусами більярда.

Самопересічна крива, що проходить через початок координат, саме відповідає тій траєкторії, яка проходить через фокуси більярда. Вона називається сепаратрисою. Початок координат і точка  $(-\pi, -\pi)$  відповідають траєкторії, що йде уздовж великої осі. Нарешті, криві, що лежать поза сепаратрисою, представляють траєкторії, що йдуть уздовж границі більярда.

Розглянута картина називається фазовим портретом еліптичного більярда [5]. Вона несе в собі повну інформацію про поведінку траєкторій у еліптичному більярді. Зокрема, факт нестійкості

траєкторії, що йде уздовж великої осі більярда, одержує нову інтерпретацію.

Ми бачимо, що всі лінії рівня, які проходять поблизу початку координат і відповідають цій траєкторії, можуть виходити досить далеко від цього початку. Це і говорить про нестійкість. Навпаки, усі траєкторії поблизу точок  $(\pi/2, \pi/2)$  і  $(-\pi/2, -\pi/2)$  представлені маленькими овалами, що оточують ці точки. І це відповідає стійкості траєкторії, що йде уздовж малої осі більярда.

До аргументів, зв'язаних з помилками округлення, можна додати більш фізичний характер. В роботі А.А.Панова [1] розглянуто випадок, коли частка рухається не в еліптичному більярді, а в злегка деформованому, який для визначеності обмежений кривою

$$(1 - \varepsilon) \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \varepsilon \left( \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} \right) = 1. \quad (7)$$

Рівняння (7) описує опуклий симетричний овал з тими ж самими вершинами, що у вихідного еліпса. Запускаючи частки з нижньої вершини овалу в різних напрямках і відзначаючи для кожної траєкторії точки з координатами  $(t_n, \varphi_n)$ , можна одержати фазовий портрет „збуреного” більярда (рис. 5).

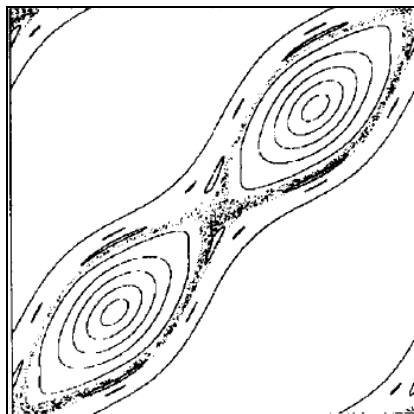


Рис. 5. Фазовий портрет „збуреного” більярда [1]

Порівнюючи рис. 4 і 5, відзначаємо появу на місці сепаратиси розмитої траєкторії, яка не вкладається ні на якій кривій, і яка заповнює цілу область на фазовому портреті. Побудова фазового портрета дозволяє одержати повну уяву про перебіг усіх траєкторій усередині більярда.

Однак, у чисельних експериментах помилки округлення призводять до стохастичного поведіння траєкторії частки у околі великої осі еліпса. В Інтернеті з'явилися повідомлення [2] про створення дослідних зразків ідеальних дзеркал, здатних протягом тривалого часу утримувати світловий промінь усередині утвореної ними порожнини. Це дозволяє сподіватися на можливість фізичного відтворення комп'ютерних експериментів, що додасть інтересу розглянутим питанням. Адже на фізичному рівні таке поведіння траєкторії виникає в результаті незначної деформації еліптичного більярда.

**Висновок.** Використовуючи поняття фазового портрету було досліджено загальний випадок поведіння траєкторій умовної частки усередині еліптичного більярда, що дозволило здійснити «унаочнення» всієї множини траєкторій одночасно.

### *Література*

1. Панов А.А. Компьютерные эксперименты с эллиптическим бильярдом / А.А. Панов // Математическое моделирование. – №4, т.13. – 2001. – С. 117–126.
2. Новости физики в сети Internet. Успехи физ.наук. – 1999. – т.169. – с.48.
3. Козлов В.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. / В.В.Козлов, Д.В.Трещев. – М.: МГУ, 1991. – 168 с.
4. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. / Л.А. Вайнштейн. – М.: Советское радио, 1996. – 475 с.
5. Мун Ф. Хаотические колебания / Ф.Мун. – М.: Мир, 1990. – 311 с.
6. Білецький С.В. Геометричне моделювання багатократних відбиттів світлових і теплових променів в еліптичних областях: автореф. на соискание ученой степени канд. техн. наук: 05.01.01/ С.В. Білецький. – Київ, 2006. – 20 с.

### **ПОВОДЖЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХОМОЇ ЧАСТКИ УСЕРЕДИНІ ЕЛІПТИЧНОГО БІЛЬЯРДА**

Сидоренко Е.С., Симонова О.Г., Шелихова И.Б.

*В работе исследован общий случай поведения траекторий условной частицы внутри эллиптического бильярда, с использованием понятие фазового портрета, что позволило осуществить «визуализацию» всего множества траекторий одновременно. Конструирование фазового портрета эллиптического бильярда выполнено с использованием понятия сечения Пуанкаре.*

*Ключевые слова: эллиптический бильярд, фазовый портрет, сечение Пуанкаре, визуализация траекторий, компьютерный эксперимент.*

### **BEHAVIOUR OF THE TRAJECTORY OF THE RELATIVE FRAME PARTICLE IN ELLIPTIC BILLIARDS**

Sidorenko E., Simonova O., Shelikhova I.

*Using a concept of a phase portrait of work the general case of behavior of trajectories of the conditional particle in elliptic billiards is investigated that allowed to carry out "visualization" of all set of trajectories at the same time. Constructioning of a phase portrait of elliptic billiards it is executed with use of a concept of section of the Poincare.*

*Keywords: elliptic billiards, a phase portrait, section of the Poincare, visualization of trajectories, a computer experiment.*