УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ СІМ'Ї ІЗОТРОПНИХ ПРОСТОРОВИХ PH-КРИВИХ НА ОСНОВІ КВАТЕРНІОНІВ ІЗ КОЛІНЕАРНОЮ ВЕКТОРНОЮ ЧАСТИНОЮ

Аушева Н. М., д.т.н.
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
(Україна)

Робота висвітлює спосіб побудови ізотропних просторових кривих за годографом Піфагора (PH-кривих). Для побудови кривих використовуються кватерніони, що лежать у чотиривимірній площині в просторі R^4. Знайдено умови ізотропності для просторових кубічних кривих. Наведено приклади з різними значеннями багатовимірної уявної одиниці.

Ключові слова: PH-крива, ізотропна крива, умови ізотропності, кватерніони.

Постановка проблеми. Для завдання кривої з конкретною довжиною дуги доцільно використовувати криві, що задані від натурального параметру. Але не всі криві можна задати таким чином та не завжди це зручно. Існує клас кривих за годографом Піфогора (PH) [1] вираз для довжини таких кривих є поліномом та може бути розрахованим без чисельних методів. Для завдання просторових PH-кривих було запропоновано застосовувати кватерніони [2]. При моделюванні ізотропних кривих [3] найчастіше застосовувалась умова ізотропності ланок характеристичних многокутників, використання PH-кривої дозволить знайти умови ізотропності з виразу довжини кривої.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача розширення поняття комплексного числа вирішується за допомогою застосування кватерніонів з колінеарною векторною частиною, які належать до площини в чотиривимірному просторі та визначаються тривимірною уявною одиницею [4]. Статті [5-6] показують, що кватерніони з колінеарними векторними частинами можна застосовувати для моделювання ізотропних кривих та оперувати тривимірною уявною одиницею. У роботі [7] пропонується застосувати для моделювання плоскої сітки ізотропну криву за годографом Піфагора (PH). Побудова сітки здійснюється на основі конфорної та квізіконформної заміни параметра.

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є розробка способу конструювання ізотропної просторової PH-кривої на основі теорії кватерніонів.

Основна частина. Розглянемо підхід до побудови просторових кривих за годографом Піфагора (PH) [2]. Було запропоновано застосувати для характеристики таких кривих чотири поліноми, а саме:

$$|\mathbf{r}'(\mathbf{t})|^2 = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \sigma^2(t) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x'(t) = u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t) \\ y'(t) = 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)] \\ z'(t) = 2[v(t)q(t) - u(t)p(t)] \\ \sigma(t) = u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t) \end{cases} \qquad (1)$$

для деяких поліномів $u(t)$, $v(t)$, $p(t)$, $q(t)$.

Формулювання за допомогою кватерніонів вперше введено в роботі [8], в якій наводиться дуже елегантне і стисле подання цієї структури. Нехай $\mathbf{A}(t) = u(t) + v(t)i + p(t)j + q(t)k$ – кватерніонний поліном, а $\mathbf{A}^*(t) = u(t) - v(t)i - p(t)j - q(t)k$ - спряжений кватерніонний поліном. Результат добутку матиме вигляд:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{i}\mathbf{A}^*(t) = [u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)]i + \\ + 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)]j + 2[v(t)q(t) - u(t)p(t)]k. \qquad (2)$$

Співвідношення (2) визначає PH-структуру в просторі $\mathbf{R}^3$ ($\mathbf{j}$ або $\mathbf{k}$ можна поставити замість $\mathbf{i}$, що визначить перестановку поліномів $u(t)$, $v(t)$, $p(t)$, $q(t)$).

Скористаємося даним поданням, але на першому етапі будемо визначати кватерніони з колінеарними векторними частинами, тобто кватерніонний та спряжений поліноми матимуть вигляд:

$$\mathbf{A}(t) = u(t) + v(t)x_I i + v(t)y_I j + v(t)x_I k, \\ \mathbf{A}^*(t) = u(t) - v(t)x_I i - v(t)y_I j - v(t)x_I k. \qquad (3)$$

Тоді рівняння (2) перепишеться у вигляді:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{i}\mathbf{A}^*(t) = [u^2(t) + v^2(t)x_I^2 - v^2(t)y_I^2 - v^2(t)z_I^2]i + \qquad (4)$$
$$+ 2[u(t)v(t)z_I + v^2(t)x_I y_I]j + 2[v^2(t)x_I z_I - u(t)v(t)y_I]k.$$

Знайдемо координати для кубічної просторової PH-кривої у вигляді кривої Без'є. Для цього задамо:

$$u(t) = u_a(1-t) + u_b t, \quad v(t) = v_a(1-t) + v_b t. \qquad (5)$$

Підставимо вирази (5) у (4). Одержимо:

- при i:

$$[u_a^2+v_a^2(x_I^2-y_I^2-z_I^2)](1-t)^2+2[u_a u_b+v_a v_b(x_I^2-y_I^2-z_I^2)](1- \quad (6)$$
$$-t)t+[u_b^2+v_b^2(x_I^2-y_I^2-z_I^2)]t^2;$$

- при j:

$$2[u_a v_a z_I+v_a^2 y_I](1-t)^2+2[u_b v_a z_I+u_a v_b z_I+2v_b v_a x_I y_I](1-$$
$$-t)t+2[u_b v_b z_I+v_b^2 y_I]t^2; \quad (7)$$

- при k:

$$2[v_a^2 z_I-u_a v_a y_I](1-t)^2+2[2v_b v_a x_I z_I-u_b v_a y_I-u_a v_b y_I](1-$$
$$-t)t+2[v_b^2 z_I-u_b v_b y_I]t^2. \quad (8)$$

Візьмемо похідну від кубічного рівняння Без'є. Вирази (6), (7), (8) є відповідно $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$. Прирівняємо значення при відповідних степенях $(1-t)t$. Одержимо:

$$x_1=\frac{u_a^2+v_a^2(x_I^2-y_I^2-z_I^2)}{3}+x_0;\ x_2=\frac{u_a u_b+v_a v_b(x_I^2-y_I^2-z_I^2)}{3}+x_1;$$

$$x_3=\frac{u_b^2+v_b^2(x_I^2-y_I^2-z_I^2)}{3}+x_2;\ y_1=\frac{2}{3}[u_a v_a z_I+v_a^2 y_I]+y_0;$$

$$y_2=\frac{u_b v_a z_I+u_a v_b z_I+2v_b v_a x_I y_I}{3}+y_1;\ y_3=\frac{2}{3}[u_b v_b z_I+v_b^2 y_I]+y_2;$$

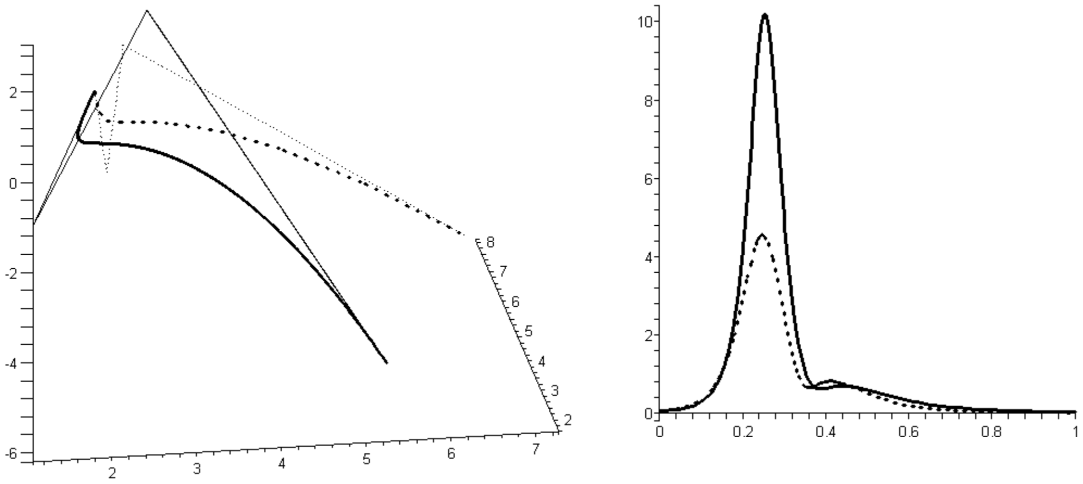
$$z_1=\frac{2}{3}[v_a^2 z_I-u_a v_a y_I]+z_0;\ z_2=\frac{2v_b v_a x_I z_I-u_b v_a y_I-u_a v_b y_I}{3}+z_1;$$

$$z_3=\frac{2}{3}[v_b^2 z_I-u_b v_b y_I]+z_2.$$

Змінюючи значення багатовимірної уявної одиниці, одержимо *сім'ю* РН-кривих. При однакових довжинах багатовимірних уявних одиниць будемо мати *сім'ю* кривих з однаковими довжинами кривих.

Приклад 1. Побудуємо РН-криву на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною у вигляді кривої Без'є. Задамо: $u_a=1-2i;\quad u_b=3+i;\quad v_a=-2+3i;\quad v_b=4-5i$. Нехай для моделювання кривої застосовується нормована уявна одиниця: $\mathbf{I}=\frac{2}{3}i+\frac{2}{3}j+\frac{1}{3}k$. Для визначання кривої у просторі необхідно задати координати початкової точки: $x_0=2+3i;\quad y_0=3+4i;\quad z_0=1+i$. Координати точок кубічної кривої: $x_1=1.19+2.11i;\quad x_2=2.59-0.37i;$ $x_3=5.59+3.11i;\quad y_1=2.41+2i;\quad y_2=2.81+7.85i;\quad y_3=3.92-6.44i;$ $z_1=-1.52-3.89i;\quad z_2=2.85+0.7i;\quad z_3=-6.04-0.33i$. Тепер змінимо координати тривимірної уявної одиниці: $\mathbf{I}=\frac{1}{3}i+\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k$. Розрахуємо координати точок другої кубічної кривої:

$x_1 = 2.29 + 4.78i$; $x_2 = 2.15 - 2.59i$; $x_3 = 7.15 + 9.78i$; $y_1 = 4.04 + 5.33i$; $y_2 = 1.74 + 7.26i$; $y_3 = 7.96 - 3.56i$; $z_1 = -1.52 - 3.89i$; $z_2 = 2.85 + 0.7i$; $z_3 = -6.04 - 0.33i$. Довжини побудованих кривих рівні: $dl = 1 - 11i$. На рис. 1.а) відображено побудовані криві, а на рис.1.б) – графіки кривин. Суцільною лінією «——» відображено криву з тривимірною уявною одиницею $\mathbf{I} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k$, а штриховою «-------» – з $\mathbf{I} = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$.



а) *б)*

Рис.1. *а)* PH-криві з різним значенням багатовимірної уявної одиниці, *б)* графіки функції кривини

Побудуємо ізотропну криву на основі кватерніонних поліномів із колінеарною векторною частиною. Ізотропну криву будемо шукати у вигляді Без'є 3-го порядку. Для цього скористаємось виразом (1):

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \\
&= \int_0^1 \sqrt{(u(t)^2 + v(t)^2 x_I^2 + v(t)^2 y_I^2 + v(t)^2 z_I^2)^2}\, dt = \\
&= \int_0^1 [u(t)^2 + v(t)^2 x_I^2 + v(t)^2 y_I^2 + v(t)^2 z_I^2] dt.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Як видно з умови (9), маємо точне значення інтеграла. Для кривої Без'є 3-го порядку будемо мати:

$$\left.\frac{((-u_a+u_b)t+u_a)^3}{3(-u_a+u_b)}+\frac{((-v_a+v_b)t+v_a)^3(x_I^2+y_I^2+z_I^2)}{3(-v_a+v_b)}\right|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}(u_a^2+u_a u_b+u_b^2)+\frac{1}{3}(v_a^2+v_a v_b+v_b^2)(x_I^2+y_I^2+z_I^2).$$

Тепер прирівняємо одержаний вираз до нуля та виберемо за невідоме v_b. Розв'язуючи квадратне рівняння, одержуємо значення:

$$v_{b1,2}=\frac{1}{2}\left[-v_a\pm i\sqrt{3v_a^2+\frac{4(u_a^2+u_a u_b+u_b^2)}{(x_I^2+y_I^2+z_I^2)}}\right].$$

Змінюючи багатовимірну уявну одиницю одержимо *сім'ю ізотропних* PH-кривих.

Приклад 2. Побудуємо ізотропну кубічну PH-криву Без'є. Як початкові візьмемо значення з прикладу 1. Розрахуємо значення $v_{b1,2}$ на основі (2) для двох значень багатовимірної уявної одиниці. Виберемо по одному значенню та розрахуємо координати для кривої.

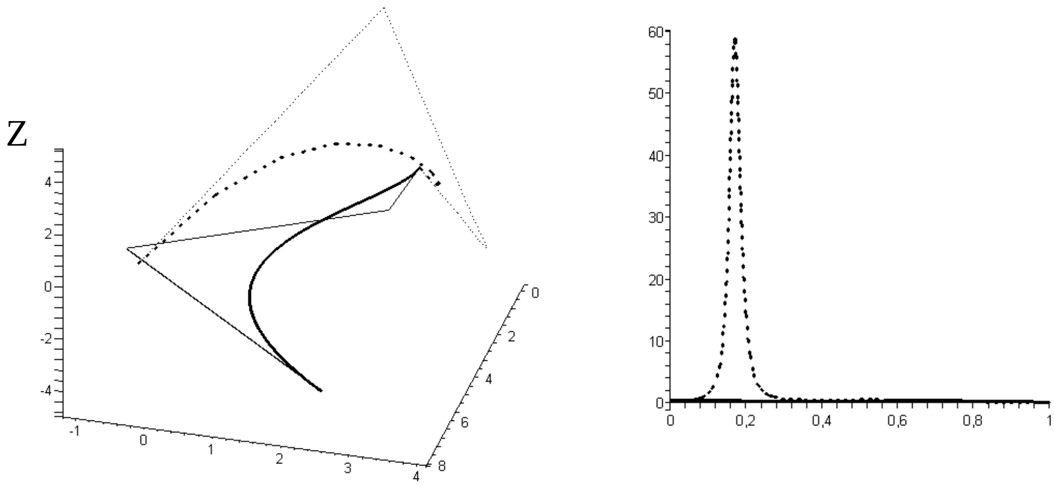
- Для $\mathbf{I}=\frac{2}{3}i+\frac{2}{3}j+\frac{1}{3}k$: $v_{b1}=2.9+1.64i,\quad v_{b2}=-0.91-4.64i$.

Оберемо перше значення. Координати кривої у цьому випадку матимуть такі значення: $x_1=1.19+2.11i$; $x_2=3.25+0.24i$; $x_3=5.7+1.89i$; $y_1=2.41+2i$; $y_2=-1.09+3.92i$; $y_3=2.19+8.5i$; $z_1=-1.52-3.89i$; $z_2=-2.49-3.71i$; $z_3=-4.78-5.78i$.

- Для $\mathbf{I}=\frac{1}{3}i+\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k$: $v_{b1}=2.9+1.64i,\quad v_{b2}=-0.91-4.64i$.

Оберемо друге значення. Розрахуємо координати для кривої: $x_1=2.29+4.78i$; $x_2=-0.12+1.41i$; $x_3=7.93+1.22i$; $y_1=4.04+5.33i$; $y_2=2.1+7.24i$; $y_3=-0.12+1.89i$; $z_1=-1.52-3.89i$; $z_2=5.08-3.84i$; $z_3=1.15+4i$.

Довжини одержаних кривих дорівнюють 0. На рис. 2а) відображено побудовані криві, а на рис.2б) – графіки кривин. Суцільною лінією «——» відображено криву з тривимірною уявною одиницею $\mathbf{I}=\frac{2}{3}i+\frac{2}{3}j+\frac{1}{3}k$, а штриховою «------» – з $\mathbf{I}=\frac{1}{3}i+\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k$.



а) *б)*

Рис.2. *а)* Ізотропні PH-криві з різним значенням багатовимірної уявної одиниці, *б)* графіки функції кривини

Висновки. В результаті виконаних досліджень було запропоновано застосувати кватерніони з колінеарною векторною частиною для визначення просторових PH-кривих. Розглянуто перехід до кубічної кривої Без’є на основі лінійних функцій. Знайдено залежності для ізотропних просторових кубічних кривих. Показано, що багатовимірна уявна одиниця визначає сімейство просторових ізотропних PH-кривих.

Література

1. Farouki R.T. Pythagorean hodographs [Text] / R.T. Farouki, T. Sakkalis // IBM J. Res. Develop. – № 34(5). – 1990. – P.736–752.
2. Farouki R.T. Pythagorean–Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable [Text] / R.T. Farouki. – Springer, 2008. – 728 p.
3. Аушева Н. М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без`є [Текст] / Н.М. Аушева // Міжвідом. наук.-техн. збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С.57-61.
4. Фурман Я. А. Расширение комплексного числа [Текст] / Я.А. Фурман, А.В. Кревецкий // «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике», 2(4). – 2005. – С. 140-146.
5. Аушева Н.М. Визначення параметричних кривих на основі кватерніонів з колінеарною векторною частиною [Текст] / Н.М. Аушева // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – Вип.4, т.43.– С.67–71.

6. Аушева Н.М. Моделювання ізотропних кривих на основі кватерніонів з колінеарною векторною частиною [Текст] / Н.М. Аушева // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”. – К.: КНУБА, 2010. – Вип.86. – С.137–140.
7. Аушева Н. М. Конструювання плоскої ізотропної кривої на основі рівняння кривої за годографом Піфагора [Текст] / Н.М. Аушева // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Технічна естетика і дизайн». – К.:КНУБА, 2013. – Вип.12. – С.7-11.
8. Farouki R.T. Algorithms for spatial Pythagorean–hodograph curves [Text]/ R.T. Farouki, C.Y. Han // Geometric Properties for Incomplete Data. – Springer, 2006. – P.43–58.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕМЕЙСТВА ИЗОТРПНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ PH-КРИВЫХ НА ОСНОВЕ КВАТЕРНИОНОВ С КОЛЛИНЕАРНОЙ ВЕКТОРНОЙ ЧАСТЬЮ

Аушева Н.Н.

В работе рассматривается способ построения изотропных пространственных кривых на основе годографа Пифагора (PH-кривых). Для построения кривых используются кватернионы, лежащие в четырехмерной плоскости в пространстве R4. Найдены условия изотропности для пространственных кубических кривых. Приведены примеры с различными значениями многомерной мнимой единицы.

Ключевые слова: PH-кривая, изотропная кривая, условия изотропности, кватернионы.

MODELING OF ISOTROPIC SPATIAL PH-CURVES FAMILY BASED ON QUATERNIONS WITH COLLINEAR VECTOR PART

Ausheva N.

In the paper is highlighted the way to build the isotropic spacial curves based on the Pythagorean hodograph (PH-curves).

The quaternions are used to build the curves that lie in the four-dimensional plane of the R4 space. The conditions of isotropy for spatial cubic curves are found. The examples with different values of multi-dimentional imaginary unit are given.

Keywords: PH-curves, isotropic curve, isotropy conditions, quaternion.