УДК 514.18

ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕНЬ І ШВИДКОСТЕЙ ЛАНОК ПЛОСКИХ МЕХАНІЗМІВ З ДОПОМОГОЮ ТРИГРАННИКА ФРЕНЕ

Чепіжний А.В., аспірант*
Сумський національний аграрний університет (Україна)

В роботі розглянуто спосіб визначення положення ланки плоского механізму та швидкості заданої точки. Для цього використовується супровідний тригранник траєкторії руху ведучої ланки. В його системі описується положення веденої ланки. За знайденими параметричними рівняннями абсолютної траєкторії руху точки веденої ланки визначається її абсолютна швидкість.

Ключові слова: ланка плоского механізму, абсолютна швидкість, кутова швидкість обертання ланки, супровідний тригранник Френе, абсолютна траєкторія.

Постановка проблеми. Ланки плоского механізму зв’язані між собою, відповідно і їх швидкості в кожен момент часу теж перебувають у певній залежності. Якщо кінці прямолінійної ланки рухаються по певних траєкторіях і з певними швидкостями, то в кожен момент часу проекції швидкості кінців ланки на саму ланку є рівними. При аналітичному описі закону руху ланки плоского механізму саме цей факт є визначальним для перевірки правильності цього аналітичного опису. Тригранник і формули Френе можна з успіхом застосувати для знаходження швидкості будь-якої точки ланки плоского механізму.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Велике значення має дослідження траєкторних кривих руху окремих складових механізмів або точок їх ланок. До задач цієї групи відноситься створення механізмів, які змогли б відтворювати наперед задані криві. Деякі праці із прикладної геометрії присвячені саме цій тематиці [1-3]. Відшуканню множини траєкторних кривих, утворених за допомогою планетарних механізмів, присвячена монографія [4]. Кінематику руху відрізка у площині за заданими умовами розглянуто в праці [5]. Застосування тригранника Френе для визначення положень ланок плоского механізму показано у праці [6].

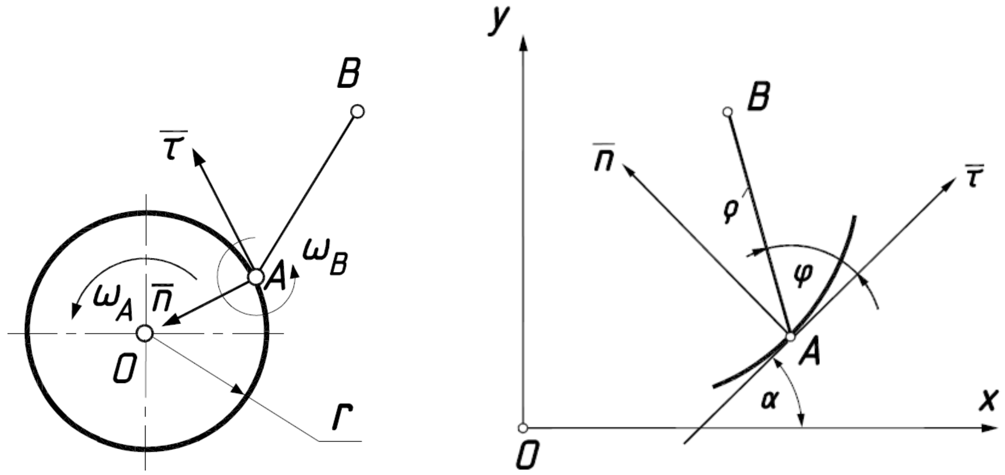
Формулювання цілей статті. Метою статті є відшукання

---

* Науковий керівник – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

швидкостей окремих точок плоских механізмів з допомогою тригранника і формул Френе.

Основна частина. Розглянемо фрагмент плоского механізму, який складається із двох ланок: кривошипа *OA* та прямолінійної ланки *AB*. Точка *A* рухається по колу радіуса r із сталою швидкістю V_A, тобто кривошип обертається навколо точки *O* із сталою кутовою швидкістю ω_A. Ланка *AB* в свою чергу обертається із сталою кутовою швидкістю ω_B навколо рухомої точки *A* в одну або протилежну сторону (рис. 1,*а*). В такому випадку рух ланки *AB* можна описати з допомогою супровідного тригранника кола – траєкторії точки *A*. При русі тригранника по колу його вершина збігатиметься із точкою *A*, орт $\bar{\tau}$ буде дотичним до кола, орт головної нормалі $\bar{n}$ буде спрямований до центра кола, а орт бінормалі проекціюватиметься в точку (рис. 1,*а*).



а *б*

Рис. 1. Графічні ілюстрації до схеми роботи дволанкового плоского механізму:
а) схема руху ланки *AB*; *б*) ланка *AB* в системі тригранника

Ланка *AB* здійснюватиме відносний рух в системі тригранника, обертаючись навколо його вершини із сталою кутовою швидкістю ω_B. Положення точки *B* в системі тригранника опишеться параметричними рівняннями:

$$\rho_\tau = \rho \cos\varphi; \qquad \rho_n = \rho \sin\varphi\,, \tag{1}$$

де $\rho = AB - const$; φ – кут повороту ланки *AB*, який відбувається за лінійним законом.

Для застосування формул Френе незалежною змінною, від якої залежить положення ланок, має бути довжина дуги кривої s, по якій рухається тригранник (в нашому випадку по колу радіуса $r=1/k$, де k – його кривина). При лінійній залежності $\varphi = as$, кутові швидкості опишуться виразами [6]:

$$\omega_A = V_A k; \qquad \omega_B = V_A \frac{d\varphi}{ds} = V_A a. \qquad (2)$$

В загальному випадку параметричні рівняння траєкторії точки *A* мають вигляд [6]:

$$x_A = \int cos(\int kds)ds; \qquad y_A = \int sin(\int kds)ds, \qquad (3)$$

де $\alpha = \int kds$ - кут повороту ортів тригранника $\overline{\tau}$ і $\overline{n}$ по відношенню до осей *Ox* і *Oy* відповідно (рис. 1,а).

Якщо відомі залежності (1) і натуральне рівняння напрямної кривої (траєкторії точки *A*) *k=k(s)*, то абсолютна траєкторія руху точки *B* визначиться із параметричних рівнянь [6]:

$$\begin{aligned} x_B &= \rho cos\left(\varphi + \int kds\right) + \int cos\left(\int kds\right)ds; \\ y_B &= \rho sin\left(\varphi + \int kds\right) + \int sin\left(\int kds\right)ds. \end{aligned} \qquad (4)$$

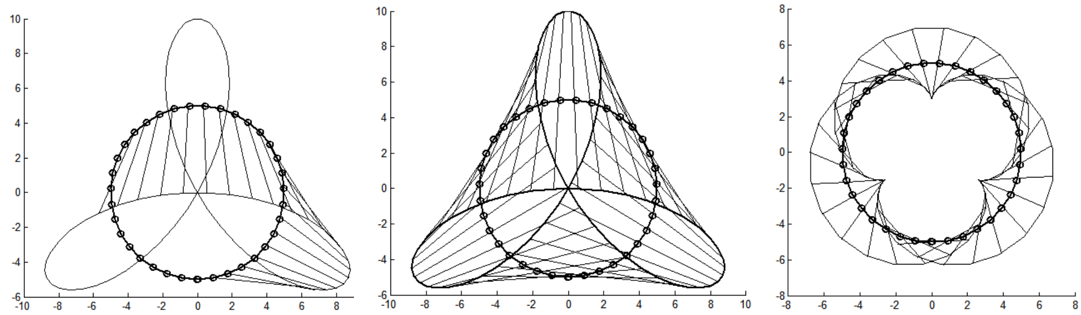
Для кола *k=1/r* рівняння (3) після інтегрування виразів набувають вигляду:

$$x_A = r\,sin\frac{s}{r}; \qquad y_A = -r\,cos\frac{s}{r}. \qquad (5)$$

Відповідно рівняння абсолютної траєкторії точки *B* запишуться:

$$\begin{aligned} x_B &= \rho cos\left[\left(a + \frac{1}{r}\right)s\right] + r\,sin\frac{s}{r}; \\ y_B &= \rho sin\left[\left(a + \frac{1}{r}\right)s\right] - r\,cos\frac{s}{r}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Таким чином, за рівняннями (5) визначаються координати точки *A* – одного кінця прямолінійної ланки *AB*, а за рівняннями (6) – координати точки *B* – протилежного її кінця. За координатами двох точок можна побудувати множину положень прямолінійної ланки із заданою щільністю в залежності від величини *Δs*. Побудуємо множину положень ланки *AB* для заданого співвідношення кутових швидкостей ω_A/ω_B=*k/a*. При побудові було з’ясовано, що прирізних співвідношеннях кутових швидкостей обертання ланок та їх довжин можна отримати множини положень ланок із різними властивостями. Наприклад, при однакових довжинах ланок і співвідношенні $\omega_A./\omega_B$=-2/3 (тобто кутові швидкості обертання мають протилежний напрям) абсолютною траєкторією точки *B* є крива, яка називається трьохпелюстковою трояндою (рис. 2,*а,в*). При першому оберті точки *A* по колу множина положень ланки *AB* займає положення, яке зображено на рис. 2,*а*, а при другому оберті – таке, яке показано на рис. 2,*б*. Звідси можна зробити висновок, що в тій самій точці кола кінець ланки (точка *B*) при першому повороті знаходиться по одну його сторону, а при другому – на протилежній стороні. Звідси випливає, що при продовженні ланки *AB* в протилежну сторону від точки *A* кінці подовженої ланки рухатимуться по одній і тій же траєкторії – по трьохпелюстковій троянді.



а б в

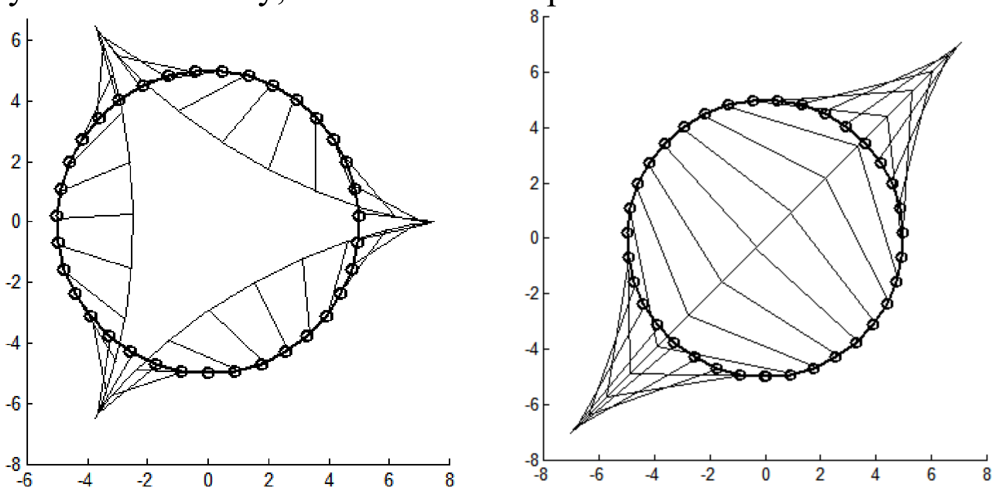
Рис. 2. Множина положень ланки *AB* при $k=0{,}2$ ($r=5$):

а) $\omega_A./\omega_B$=-2/3; $AB=\rho=5$; один неповний оберт точки *A*;

б) $\omega_A./\omega_B$=-2/3; $AB=\rho=5$; два повних оберти точки *A*;

в) $\omega_A./\omega_B$=2/3; $AB=\rho=2$; два повних оберти точки *A*

Якщо взяти $\omega_A./\omega_B=-1/3$ при $\rho=2{,}5$ і $r=5$, то множина положень ланки *AB* розташується так, як показано на рис. 3,*а*, тобто при кожному новому оберті ланка займатиме ті ж самі положення, що і при попередньому. На рис. 3,*б* показано випадок, коли точка *A* ланки *AB* рухається по колу, а точка *B* – по прямій лінії.



а б

Рис. 3. Множина положень ланки *AB* при $k=0{,}2$ ($r=5$):

а) $\omega_A./\omega_B$=-1/3; $\rho=2{,}5$; *б*) $\omega_A./\omega_B$=-1/2; $\rho=5$

Отже, при однакових довжинах ланок *OA* і *AB* і протилежних кутових швидкостях їх обертання точка *B* рухатиметься по прямій у тому випадку, коли швидкість обертання ланки *AB* буде вдвічі меншою від швидкості обертання ланки *OA*.

Абсолютну швидкість точки *B* можна отримати диференціюванням параметричних рівнянь абсолютної траєкторії (6) по параметру часу t. Оскільки вона описана у функції довжини дуги s

напрямного кола, то це потрібно враховувати при диференціюванні: $\frac{dx_A}{dt}=\frac{dx_A}{ds}\frac{ds}{dt}=V_A\frac{dx_A}{ds}=\frac{\omega_A}{k}\frac{dx_A}{ds}$. Аналогічно матимемо $\frac{dx_A}{dt}=\frac{\omega_A}{k}\frac{dy_A}{ds}$.

Після диференціювання рівнянь (6) отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{dx_B}{ds}&=-\rho\left(a+\frac{1}{r}\right)sin\left[\left(a+\frac{1}{r}\right)s\right]+cos\frac{s}{r};\\ \frac{dy_B}{ds}&=\rho\left(a+\frac{1}{r}\right)cos\left[\left(a+\frac{1}{r}\right)s\right]+sin\frac{s}{r}.\end{aligned} \tag{7}$$

Щоб отримати вектор абсолютної швидкості точки B потрібно вирази (7) помножити на сталу ω_A/k. Модуль швидкості отримаємо множенням сталої ω_A/k на корінь квадратний складових (7):

$$V_B=\omega_A\sqrt{r^2+\rho^2(1+ar)^2-2r\rho(1+ar)sin\,as}\,. \tag{8}$$

За формулою (8) можна знаходити величину швидкості будь-якої точки ланки AB. Для цього потрібно надати для ρ певного значення довжини, відлік якої починається від точки A. Наприклад, для $\rho=0$ із (8) знаходимо: $V_B=\omega_A r$, що відповідає швидкості точки A, що і слід було чекати.

Висновки. Для аналітичного опису множини положень прямолінійної ланки плоского механізму доцільно застосовувати тригранник Френе, вершина якого збігається з одним із його кінців. Тригранник в такому випадку є супровідним для заданої траєкторії цього кінця. Протилежний кінець описує відносну траєкторію по відношенню до тригранника, у якому ланка робить обертальний рух навколо вершини. Абсолютну траєкторію і швидкість знаходять за відомими формулами.

Література

1. Бергер Э.Г. Способ геометрического и механического образования рациональных кривых 3-г и 4-го порядка / Э.Г. Бергер, В.П. Табацков // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1982. – Вып. 33. – С. 88 - 89.
2. Потишко А.В. Воспроизведение некоторых спиралей / А.В. Потишко, В.С. Кобезская // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1971. – Вып. 13. – С. 84 - 85.
3. Геометричні методи кінематичного аналізу плоских важільних механізмів вищих класів / [Г.П. Зубащенко, О.Г. Корченко, Т.В. Попкова, М.Г. Макаренко, В.П. Щербина] // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2007. –Вип. 77. – С. 80-84.
4. Росоха С.В. Геометричне моделювання об’ємів робочих камер роторно-планетарних трохоїдних машин / С.В. Росоха, Л.М. Куценко. – Х.: УЦЗУ, 2007. – 176 с.

5. Пилипака С.Ф. Кінематика відрізка, кінці якого описують задані лінії у площині / С.Ф. Пилипака, В.М. Бабка, Т.С. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2007. – Вип. 77. – С. 36–42.
6. Чепіжний А.В. Визначення положень ланок плоского механізму за допомогою системи тригранника Френе / А.В. Чепіжний, В.М. Бабка // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 20–26.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ПОМОЩЬЮ ТРЕХГРАННИКА ФРЕНЕ

Чепижный А.В.

В работе рассмотрен способ определения положения звена плоского механизма и скорости заданной точки. Для этого используется сопровождающий трехгранник траектории движения ведущего звена. В его системе описывается положение ведомого звена. По найденным параметрическим уравнениям абсолютной траектории движения точки ведомого звена определяется ее абсолютная скорость.

Ключевые слова: звено плоского механизма, абсолютная скорость, угловая скорость вращения звена, сопровождающий трехгранник Френе, абсолютная траектория.

DEFINITION OF POSITIONS AND SPEEDS OF PARTS OF FLAT MECHANISMS BY MEANS OF THREE – EDGE OF FRENET

Chepyzhniy A.

The way of definition of a position of a part of the flat mechanism and speed of the set point is in-process observed. The accompanying three – edge of a mechanical trajectory of the driving member is for this purpose used. In its system the driven member position is presented. On the found parametric equations of an absolute mechanical trajectory of a point of the driven member its absolute speed is defined.

Keywords: a part of the flat mechanism, absolute speed, angular speed of twirl of the part, an accompanying three – edge of Frenet, an absolute trajectory.