УДК 514.18

ПЛОСКІ КРИВІ У ФУНКЦІЇ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА НА ОСНОВІ ГОДОГРАФА ПІФАГОРА

Захарова Т.М., к.т.н.
Сумський національний аграрний університет (Україна),
Кремець Т.С., к.т.н.
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна)

Робота висвітлює спосіб конструювання плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, за допомогою годографа Піфагора. У статті отримано ряд плоских кривих з наведенням їх параметричних та натурального рівняння, а також візуалізовано отримані результати.

Ключові слова: плоска крива, натуральний параметр, довжина дуги, годограф Піфагора, кривина.

Постановка проблеми. Криві, описані параметричними рівняннями у функції натурального параметра (довжини дуги) знаходять широке застосування при вирішенні багатьох прикладних задач: при описі руху матеріальної точки по заданій траєкторії, у задачах згинання листового матеріалу тощо. Проте далеко не всі криві можна задати у такому вигляді. Перепоною є інтегрування підкореневого виразу довжини дуги, яке досить рідко є можливим. У інших випадках для отримання натурального рівняння кривої виникає необхідність застосовувати чисельні методи. Це і обумовлює потребу у розширенні способів конструювання плоских кривих у натуральній параметризації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Науковцями розробляються різні способи конструювання плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра. Так, наприклад, у праці [1] для цього використовуються плоскі ізометричні сітки, а у праці [2] – супровідний тригранник Френе. Проте, існує клас кривих за годографом Піфагора [3], вираз довжини дуги яких є поліномом та дозволяє уникнути необхідності застосування чисельних методів для відшукання натуральних рівнянь кривих. Професор Аушева Н.М. у своїй праці [4] застосовує годограф Піфагора для побудови ізотропних просторових кривих. Для цього використовуються кватерніони, які лежать в чотиривимірній площині у просторі R^4. Однак, годограф Піфагора можна застосувати і для конструювання плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є формулювання способу конструювання плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, за допомогою годографа Піфагора та розширення на його основі класу таких кривих у натуральній параметризації.

Основна частина. У праці [3] зазначено, що для плоскої кривої похідні параметричних рівнянь мають вигляд:

$$x' = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}; \qquad y' = \frac{2uv}{u^2 + v^2}, \tag{1}$$

де u і v – довільні залежності від довжини дуги s.

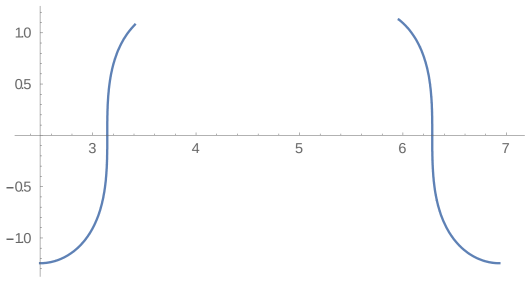
Можна переконатися, що наведені формули (1) справедливі для будь-яких залежностей $u = u(s)$ і $v = v(s)$, так як для них у будь-якому випадку справджується рівність $x'^2 + y'^2 = 1$. Однак самі параметричні рівняння плоскої кривої отримати не так просто. Для цього потрібно проінтегрувати вирази (1), тобто отримати наступні інтеграли:

$$x(s) = \int \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} ds; \qquad y(s) = \int \frac{2uv}{u^2 + v^2} ds. \tag{2}$$

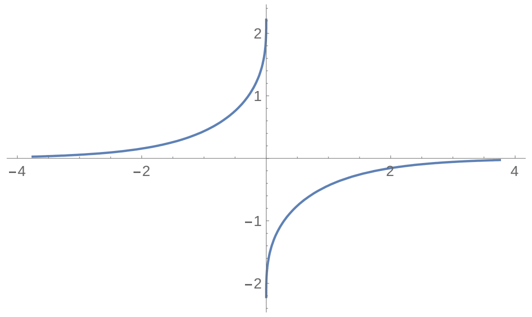
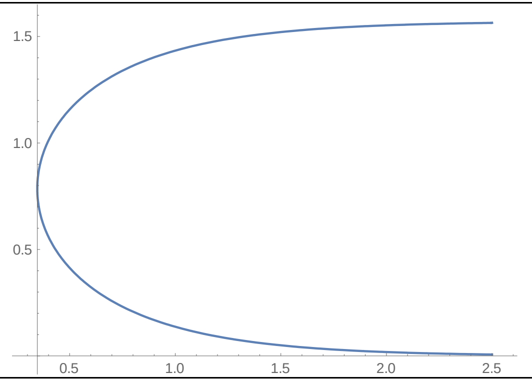
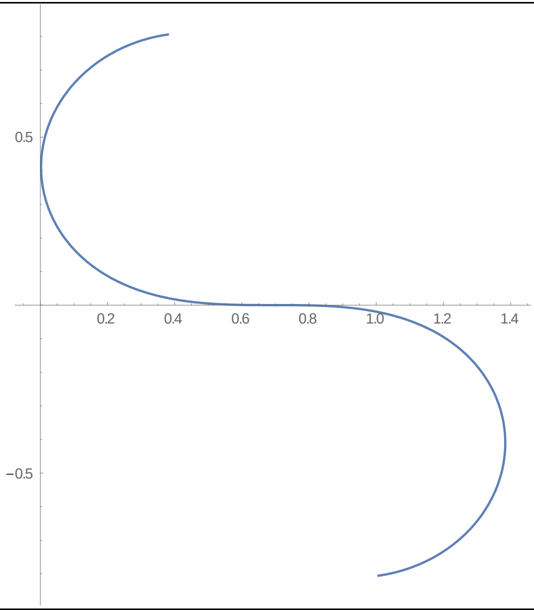
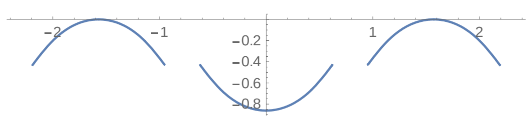
Отже, при такому підборі залежностей $u=u(s)$ і $v=v(s)$, яке дозволить інтегрування виразів (1), з'являється можливість отримати плоску криву у натуральній параметризації.

У таблиці 1 наведено отримані за допомогою запропонованого підходу криві з наведенням їх параметричних та натурального рівнянь, а також прийнятих для їх відшукання залежностей. Для деяких кривих параметричні рівняння у функції натурального параметра не наведено через їх громіздкий вигляд.

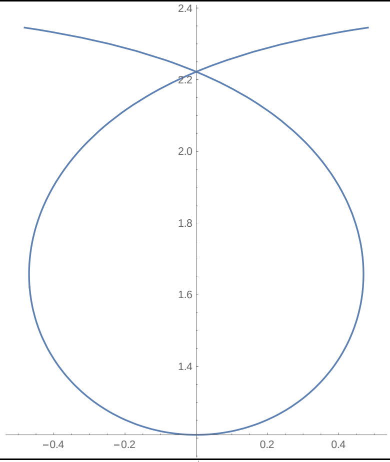
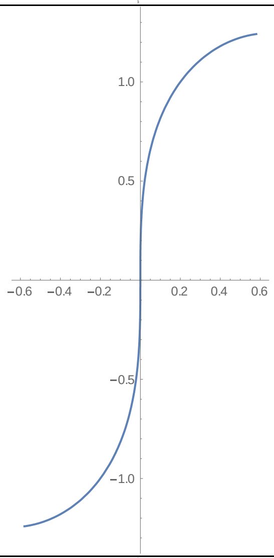
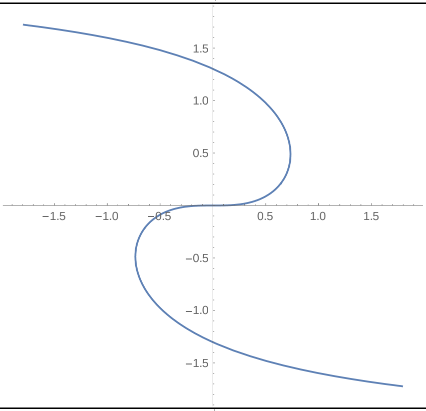
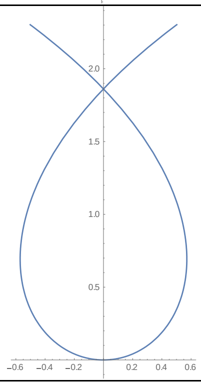
Таблиця 1

Залежності *u=u(s)* і *v=v(s)*	**Візуалізація кривої**	**Параметричні рівняння у функції натурального параметра та натуральне рівняння кривої**
$u = \sin s;$ $v = \operatorname{tg} s.$		$x = s - \sqrt{2}\,\mathrm{Arctg}\frac{\operatorname{tg} s}{\sqrt{2}}.$ $y = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctg}\frac{\sin s}{\sqrt{2}}$ $k = 4\frac{\sin s}{3 + \cos 2s}$

Продовження таблиці 1

$u=\sinh s;$ $v=\operatorname{tgh} s.$		$x=s-\sqrt{2}\operatorname{Arctgh}\dfrac{\operatorname{tgh} s}{\sqrt{2}}.$ $y=-\sqrt{2}\operatorname{Arctgh}\dfrac{\sqrt{2}}{\sinh s}$ $k=4\dfrac{\sinh s}{3+\cosh 2s}$
$u=e^{s};$ $v=\dfrac{1}{e^{s}}.$		$x=-s+\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{4s})$ $y=\operatorname{Arctg} e^{2s}$ $k=4\dfrac{e^{2s}}{1+e^{4s}}$
$u=\sin s;$ $v=\dfrac{1}{tgs}.$		$k=4\dfrac{5\sin s+\sin 3s}{7+\cos 4s}.$
$u=\sin s;$ $v=\dfrac{1}{\cos s}.$		$x=s-\dfrac{2}{\sqrt{5}}Arctg(\dfrac{\sqrt{5}}{2}tg\,2s)$ $y=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}(Arctgh\dfrac{1-2i\operatorname{tg}s}{\sqrt{5}}+$ $+Arctgh\dfrac{1+2i\operatorname{tg}s}{\sqrt{5}})$ $k=16\dfrac{\cos 2s}{\cos 4s-9}.$

Продовження таблиці 1

$u = \sinh s;$ $v = \dfrac{1}{\cosh s}.$		$x = s - \dfrac{2}{\sqrt{3}} Arctgh(\dfrac{\sqrt{3}}{2} tgh 2s)$ $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(Arctg\,\dfrac{1-2i\,\mathrm{tgh}s}{\sqrt{3}} +$ $+ Arctg\,\dfrac{1+2i\,\mathrm{tgh}s}{\sqrt{3}})$ $k = 16\dfrac{\cosh 2s}{\cosh 4s + 7}.$
$u = \dfrac{1}{\sin s};$ $v = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, s}.$		$x = \sqrt{2}\mathrm{Arctg}\dfrac{\mathrm{tg}\, s}{\sqrt{2}} - s$ $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\ln(\sqrt{2} - \sin s) +$ $+ \ln(\sqrt{2} + \sin s))$ $k = \dfrac{4 \sin s}{3 + \cos 2s}$
$u = \dfrac{1}{s};$ $v = \mathrm{s}.$		$k = \dfrac{4s}{1+s^4}$
$u = s^2;$ $v = \mathrm{s}.$		$x = s - 2\mathrm{Arctg} s$ $y = \ln(1+s^2)$ $k = \dfrac{2}{1+s^2}$

Окрім того, за допомогою запропонованого підходу вдалося відшукати ще дві специфічні криві, а саме:

плоска крива сталої середньої уявної кривини:

$$u = sin(is); \qquad v = cos(is).$$

$$x = -\frac{1}{2}sinh\,2s;$$

$$y = i\,cosh^2 s;$$

$$k = 2i\,.$$

та плоска крива змінної уявної кривини:

$$u = sech(is); \qquad v = tgh(is).$$

$$x = 2tgs - s;$$

$$y = 2i\,sec\,s;$$

$$k = 2i\,sec\,s.$$

Висновки. Запропонований підхід дає можливість поповнювати клас плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, новими кривими. Пошук таких кривих може бути продовжено підбором належних залежностей *u=u(s)* і *v=v(s).*

Література

1. Пилипака С.Ф. Конструювання кривих у функції натурального параметра на основі плоских ізометричних сіток / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т. 50. – С. 29 – 35.
2. Пилипака С.Ф. Конструювання кривих у функції натурального параметра на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова, Т.П. Федорина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип.4, т.55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С. 176 – 184.
3. Farouki R.T. Pathagorean hodographs [Text] / R.T. Farouki, T. Sakkalis // IBM J.Res.Develop. – № 34 (5). – 1990. – P. 736 – 752.
4. Аушева Н.М. Моделювання сім’ї ізотропних просторових PH-кривих на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною / Н.М. Аушева // Збірник наукових праць «Сучасні проблеми моделювання». – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2016. – Вип. 7. – С. 3 – 9.

ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ В ФУНКЦИИ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА НА ОСНОВАНИИ ГОДОГРАФА ПИФАГОРА

Захарова Т.Н., Кремец Т.С.

В работе рассматривается способ конструирования плоских кривых, описанных параметрическими уравнениями в функции натурального параметра, с помощью годографа Пифагора. В статье получено ряд плоских кривых с приведением их параметрических и натурального уравнения, а также визуализировано полученные результаты.

Ключевые слова: плоская кривая, натуральный параметр, длина дуги, годограф Пифагора, кривизна.

FLAT CURVES IN THE FUNCTION OF NATURAL PARAMETER ON THE BASIS OF THE PYTHAGOREAN HODOGRAPH

Zakharova T., Kremets T.

The paper considers a method for constructing plane curves described by parametric equations in the function of a natural parameter using the Pythagoras hodograph. In this paper we obtain a series of plane curves with reduction of their parametric and natural equations, and also visualize the obtained results.

Key words: flat curve, natural parameter, arc length, the Pythagorean hodograph, curvature.