УДК 514.18

АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ, ЯКІ ЛЕЖАТЬ НА ПОВЕРХНІ ЦИКЛІДИ ДЮПЕНА

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Муквич М.М., к.т.н.*
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна)

Здійснено аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні цикліди Дюпена, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній.

Ключові слова: мінімальна поверхня, цикліда Дюпена, ізометрична сітка координатних ліній, лінійний елемент поверхні, ізотропна лінія.

Постановка проблеми. Використання мінімальних поверхонь при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій має переваги практичного змісту. Зокрема, оболонки, які мають геометричну форму мінімальних поверхонь, володіють архітектурною виразністю, можуть перекривати складні плани без утворення розривів геометрії з джерелами виникнення напружень [1, с. 152]. Напруженість у кожній точці мінімальної поверхні є сталою величиною, тому її форма залежить тільки від форми контуру, через який проведено мінімальну поверхню [2, с. 43]. Величина середньої кривини H мінімальної поверхні дорівнює нулю у всіх її точках, що є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром) на цій поверхні.

Задаючи мінімальну поверхню функцією $z = z(x;\ y)$, Ж. Лагранж (J. Lagrange) одним із перших зробив висновок, що функція $z = z(x;\ y)$ повинна задовольняти диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа [3, с. 683] в частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується. Тому один із сучасних напрямків дослідження аналітичного опису мінімальних поверхонь полягає в удосконаленні чисельних методів розв'язування диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа [4,5]. У роботах [1,2,6], з метою проектування архітектурних конструкцій, розроблено графо-аналітичні методи аналітичного опису поверхонь, близьких до мінімальних. Відомими є

* Науковий консультант – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф.

дослідження з геометричного моделювання деформованого листа параболічного рефлектора, що приймає форму, близьку до мінімальної поверхні [7].

Використання геометричних моделей, описаних мінімальними поверхнями в CAD системах при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій, потребує спрощення аналітичного опису мінімальних поверхонь та отримання їх параметричних рівнянь. Ця задача, починаючи з робіт С. Лі (S. Lie), реалізується за допомогою методів функцій комплексної змінної [3, с. 685].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно знайти параметричні рівняння ізотропних ліній нульової довжини [8, с. 144]. Моделювання просторових ізотропних кривих за допомогою кватерніонів у просторі R^4, розглянуто у роботі [9]. Ряд робіт [10, 11] авторів даної статті присвячено задачі аналітичного опису ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній.

Розширення способів аналітичного опису ізотропних ліній та побудови мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної є важливою умовою для розв'язання проблеми конструювання неперервного каркасу мінімальних поверхонь.

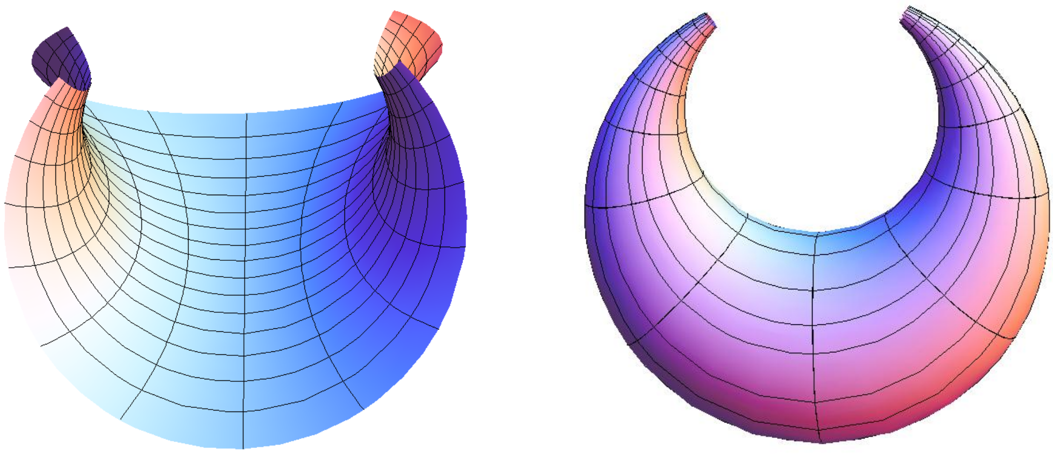
Формулювання цілей статті. Знайти аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні циклiди Дюпена, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній.

Основна частина. У дослідженнях Несвідоміної О.В. [12] було здійснено інверсію циліндра, віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній, та знайдено параметричні рівняння циклiди Дюпена, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній. Параметричні рівняння циклiди Дюпена мають вигляд [12]:

$$X(u;\, s) = \frac{R\cos\frac{s}{R} + a}{a^2 + R^2 + u^2 + 2aR\cos\frac{s}{R}};\quad Y(u;\, s) = \frac{R\sin\frac{s}{R}}{a^2 + R^2 + u^2 + 2aR\cos\frac{s}{R}};$$
$$Z(u;\, s) = \frac{u}{a^2 + R^2 + u^2 + 2aR\cos\frac{s}{R}}. \tag{1}$$

де R – радіус основи вихідного циліндра; a – стала величина, яка задає зміщення вихідної поверхні циліндра відносно центра сфери інверсії одиничного радіуса; u – змінна величина, яка визначає довжину прямолінійної твірної циліндра, s – змінна величина, яка визначає довжину кола основи вихідного циліндра [12].

На рис.1 (а, б) зображено відсіки циклід Дюпена, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній, побудовані за рівняннями (1) при $s \in \left[-\frac{\pi}{2};\ldots\frac{\pi}{2}\right]$; $u \in [-\pi;..\pi]$.



а б

Рис. 1. Відсіки циклід Дюпена:
а) цикліда Дюпена, побудована за рівняннями (1) при $R = a = 1$;
б) цикліда Дюпена, побудована за рівняннями (1) при $R = 0{,}3$; $a = 1$

Розкладемо на множники вираз лінійного елемента [8, с. 40] цикліди Дюпена (1), що визначає довжину будь-якої кривої, яка лежить на її поверхні:

$$ds^2 = \frac{1}{\left(2 + u^2 + 2\cos s\right)^2} \cdot (du - i \cdot ds)(du + i \cdot ds), \qquad (2)$$

де i – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$u = i \cdot s + C \quad \text{або} \quad u = -i \cdot s + C, \qquad (3)$$

де C – довільна стала інтегрування.

Нехай $C = 0$, тоді, підставивши вираз $u = i \cdot s$ у (1), отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної лінії, яка лежить на поверхні цикліди Дюпена, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній:

$$x(s) = \frac{R\cos\frac{s}{R} + a}{a^2 + R^2 - s^2 + 2aR\cos\frac{s}{R}}; \; y(s) = \frac{R\sin\frac{s}{R}}{a^2 + R^2 - s^2 + 2aR\cos\frac{s}{R}};$$

$$z(s) = \frac{i \cdot s}{a^2 + R^2 - s^2 + 2aR\cos\frac{s}{R}}. \qquad (4)$$

Здійснимо для функцій комплексної змінної (4) заміну: $s=u+i\cdot v$. Відокремивши дійсну та уявну частину, отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

$$X(u,v)=\left[a\left(a^2+r^2-u^2+v^2\right)+r\cdot\left(\cos\frac{u}{r}\operatorname{ch}\frac{v}{r}\left(3a^2+r^2-u^2+v^2\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+ar\left(\cos\frac{2u}{r}+\operatorname{ch}\frac{2v}{r}\right)+2uv\sin\frac{u}{r}\operatorname{sh}\frac{v}{r}\right)\right]\cdot\frac{1}{m(u;v)+2r^2v^2};$$
$$Y(u,v)=\left[\sin\frac{u}{r}\operatorname{ch}\frac{v}{r}\left(a^2+r^2-u^2+v^2\right)+ar\sin\frac{2u}{r}-\right.$$
$$\left.-2uv\sin\frac{u}{r}\operatorname{sh}\frac{v}{r}\right)\Bigg]\cdot\frac{r}{m(u;v)};\qquad(5)$$
$$Z(u,v)=-\left[v\cdot\left(a^2+r^2+u^2+v^2+2ar\cos\frac{u}{r}\operatorname{ch}\frac{v}{r}\right)+\right.$$
$$\left.+2ar\cdot u\cdot\sin\frac{u}{r}\operatorname{sh}\frac{v}{r}\right)\Bigg]\cdot\frac{r}{m(u;v)},$$

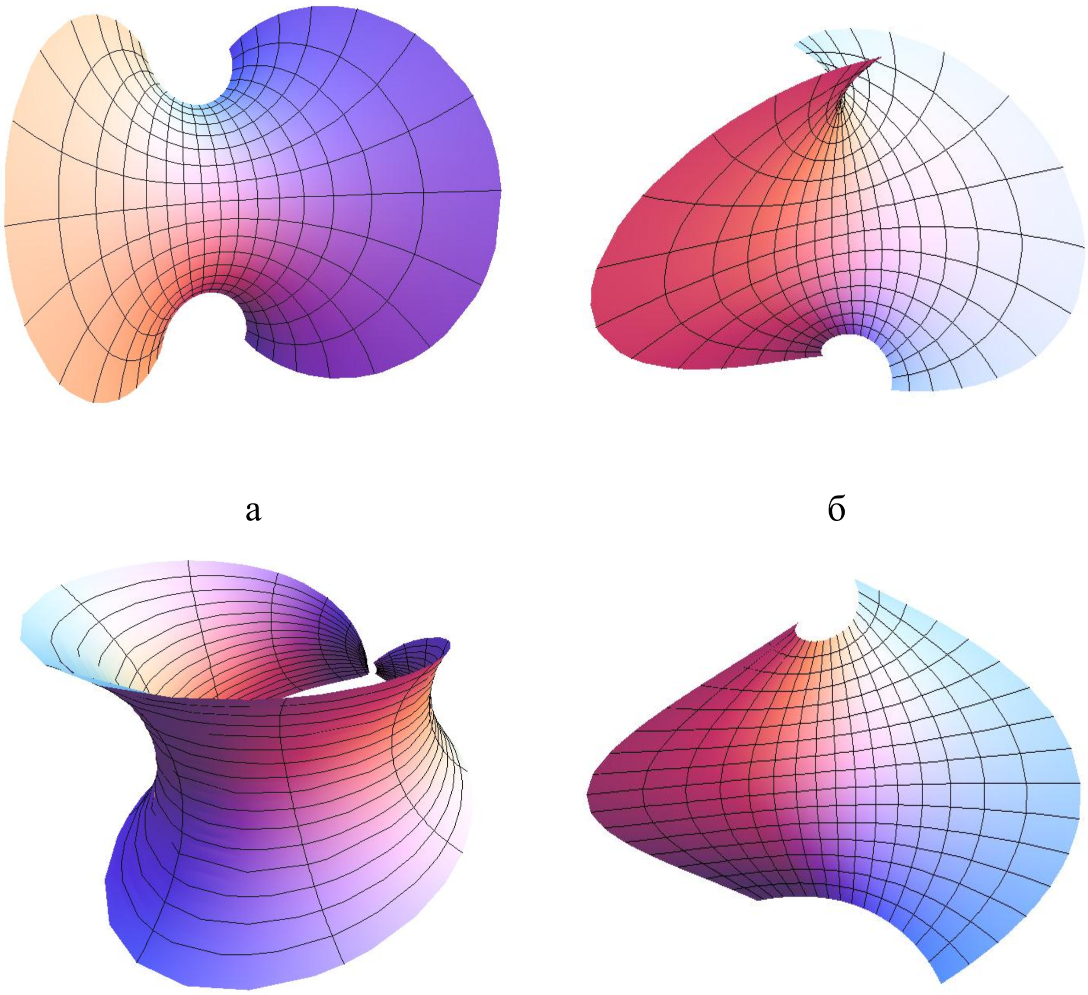
де: $m(u;v)=\left(a^2+r^2-u^2\right)^2+2\left(a^2+r^2+u^2\right)v^2+v^4+2a^2r^2\cos\frac{2u}{r}+$
$$+2ar\cdot\left[2\cos\frac{u}{r}\cdot\operatorname{ch}\frac{v}{r}\left(a^2+r^2-u^2+v^2\right)+a\cdot r\cdot\operatorname{ch}\frac{v}{r}+4uv\cdot\sin\frac{u}{r}\operatorname{sh}\frac{v}{r}\right].\qquad(6)$$
та приєднаної мінімальної поверхні:

$$X^*(u,v)=\frac{2uv\left(a+r\cos\frac{u}{r}\operatorname{ch}\frac{v}{r}\right)+r\left(a^2-r^2+u^2-v^2\right)\sin\frac{u}{r}\operatorname{sh}\frac{v}{r}}{m(u;v)};$$
$$Y^*(u,v)=\left[\cos\frac{u}{r}\operatorname{sh}\frac{v}{r}\left(a^2+r^2-u^2+v^2\right)+ar\sin\frac{2v}{r}+\right.$$
$$\left.+2uv\sin\frac{u}{r}\operatorname{ch}\frac{v}{r}\right)\Bigg]\cdot\frac{r}{m(u;v)};\qquad(7)$$
$$Z^*(u,v)=\left[u\cdot\left(a^2+r^2-u^2-v^2\right)+2ar\cdot u\cdot\cos\frac{u}{r}\operatorname{ch}\frac{v}{r}-\right.$$
$$\left.-2ar\cdot v\cdot\sin\frac{u}{r}\operatorname{sh}\frac{v}{r}\right)\Bigg]\cdot\frac{r}{m(u;v)}.$$

У параметричних рівняннях (7) вираз $m(u;v)$ визначається із (6).

На рис.2 (а, б) зображено мінімальні поверхні, побудовані за рівняннями (5), (7) при $a=1;\ b=1;\ u\in[-1;\ldots 1];\quad v\in[-1;\ldots 1]$.

На рис.2 (в, г) зображено мінімальні поверхні, побудовані за рівняннями (5), (7) при $a=0{,}3;\ b=1;\ u\in[-0{,}3;\ldots 0{,}3];\quad v\in[-2;\ldots 2]$.



а б

в г

Рис. 2. Відсіки мінімальних поверхонь:

а) мінімальна поверхня, побудована за рівняннями (5) при $a=1;\ b=1;$

б) приєднана мінімальна поверхня, побудована за рівняннями (7) при $a=1;\ b=1;$

в) мінімальна поверхня, побудована за рівняннями (5) при $a=0{,}3;\ b=1;$

г) приєднана мінімальна поверхня, побудована за рівняннями (7) при $a=0{,}3;\ b=1$

Вираз лінійного елемента поверхні (1) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2 = \frac{1}{\left(2+u^2+2\cos s\right)^2}\cdot\left(ds - i\cdot du\right)\left(ds + i\cdot du\right). \qquad (8)$$

Підставивши вирази $s = i\cdot u + C$ або $s = -i\cdot u + C$, отримані із (8), у параметричні рівняння поверхні (1), отримаємо рівняння двох інших сімей уявних ізотропних ліній. Для кожного значення C за допомогою знайдених ізотропних ліній можна побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них, які характеризуються спільними метричними властивостями та спільними властивостями кривини поверхні.

Висновки. На поверхні циклiди Дюпена, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, для кожного значення C можна побудувати чотири сім'ї ізотропних ліній, і кожній лінії поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні.

Література

1. Гуляев В. И. Расчёт оболочек сложной формы [Текст] / [В.И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, В.В. Гайдайчук]. – К.: Будівельник, 1990. – 192 с.
2. Михайленко В. Е. Конструирование форм современных архитектурных конструкций [Текст] / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалёв. – Киев: Будівельник, 1978. – 112 с.
3. Математическая энциклопедия [гл.ред. И. М. Виногра-дов]. – Т. 3. – М.: Изд–во «Сов. энциклопедия», 1982. – С. 683–690.
4. Пульпинский Я. С. Математическое моделирование оболочек вращения сложных форм: автореф. дис. на соискание учен. степени канд. техн. наук: 05.13.18 / Я.С. Пульпинский. – Пенза: Пензенский гос. университет архитектуры и строительства, 2006. – 20 с.
5. Клячин А. А. О сходимости полиномиальных приближённых решений уравнения минимальной поверхности [Текст] / А.А. Клячин, И. В. Трухляева // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – №1. – С. 72–83.
6. Абдюшев А. А. Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности [Текст] / А. А. Абдюшев, И. Х. Мифтахутдинов, П. П. Осипов // Известия КазГАСУ. – 2009. – №2(12). – С. 86–92.
7. Бухтяк М. С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала [Текст] / М. С. Бухтяк // Вестн. Томского гос. ун-та. Серия: математика и механика. – 2017. – №45. – С. 5–24.

8. Фиников С. П. Теория поверхностей [Текст] / С. П. Фиников. – М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
9. Аушева Н. М. Моделювання сім’ї ізотропних просторових кривих на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною [Текст] / Н. М. Аушева // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. Праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – №7. – С. 3–9.
10. Муквич М. М. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди [Текст] / М. М. Муквич // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: Видавництво ХНТУ, 2016.– №3(58). – С. 519–523.
11. Пилипака С. Ф. Аналітичний опис ізотропних ліній на поверхні псевдосфери та побудова мінімальних поверхонь [Текст] / С. Ф. Пилипака, М. М. Муквич // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія: техніка та енергетика АПК. – К., 2016.– №254. – С. 202–210.
12. Несвідоміна О. В. Згинання плоских ізометричних сіток в конус обертання [Електронний ресурс] / О. В. Несвідоміна // Збірник тез доповідей XII Міжнародної науково-практичної конференції «Обухівські читання» (21 березня 2017 року) / НУБіП України. – К., 2017. – С. 58–60. Режим доступу: https://nubip.edu.ua/node/26574.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ, ЛЕЖАЩИХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИКЛИДЫ ДЮПЕНА

Пилипака С.Ф., Муквич Н.Н.

Получено аналитическое описание минимальных поверхностей с помощью изотропных линий, лежащих на поверхности циклиды Дюпена, отнесенной к изометрической сети координатных линий.

Ключевые слова: минимальная поверхность, циклида Дюпена, изометрическая сеть координатных линий, линейный элемент поверхности, изотропная линия.

FORMATION OF MINIMAL SURFACE USING ISOTROPIC CURVED, LYING ON DUPIN’S CYCLIDE

Pylypaka S., Mukvich M.

An analytical description of minimal surfaces by means of isotropic lines lying on the surface of Dupin’s cyclide, referred to the isometric grid of the coordinate lines.

Key words: minimal surface, Dupin’s cyclide, isometric grid of the coordinate lines, linear element of a surface, isotropic line.