

УДК 514.74

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛАЙНА ИЗ КРИВЫХ БЕЗЬЕ 5-Й СТЕПЕНИ С НЕПРЕРЫВНОЙ КРИВИЗНОЙ

Бадаев Ю.И., д.т.н.,

Ганношина И.Н.

*Киевская государственная академия водного транспорта имени Петра Конашевича-Сагайдачного (Украина)*

*Предлагается моделирование криволинейного обвода сегментами кривых Безье 5-й степени по заданному точечному каркасу с заданными в них кривизнами и с обеспечением непрерывности кривизны вдоль обвода.*

*Ключевые слова: полиномиальный сегмент, сегмент кривой Безье 5-й степени, кривизна, первые и вторые производные, непрерывность кривизны.*

**Постановка проблемы.** В проектировании обводов машин и агрегатов, которые работают в движущейся среде (самолеты, автомобили и др.) необходимо задание обвода с заданным законом изменения кривизны. Необходимо иметь аналитический аппарат решения этой задачи.

**Анализ последних исследований и публикаций.** В работах [2-6] предлагаются интерактивные способы проектирования обводов с заданной формой и кривизной, но не дают возможности предвидеть результаты в начале проектирования.

**Формулирование целей статьи.** Целью статьи является вывод аналитического аппарата моделирования криволинейного обвода по наперед заданному закону изменения кривизны, что является важным для проектирования обводов самолетов, автомобилей, судов и др.

**Основная часть.** Поставим следующую задачу :  
задан на плоскости точечный ряд:

$$\Delta : X_i, Y_i, i=0,1, \dots, n,$$

а также в каждой точке задана кривизна  $K_i$ .

Как известно из [1], кривизна для векторно-заданной кривой:

$$r=r(t) [ x=x(t), y=y(t), z=z(t)]. \quad (1)$$

для плоской кривой определяется формулой:

$$k^2 = \frac{\left| \begin{matrix} x''_{tt} & y''_{tt} \\ x'_t & y'_t \end{matrix} \right|^2}{(x'^2_t + y'^2_t)^3}. \quad (2)$$

Для пространственной кривой (1) кривизна будет задана:

$$k^2 = \frac{\begin{vmatrix} x''_{tt} & y''_{tt} \\ x'_t & y'_t \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y''_{tt} & z''_{tt} \\ y'_t & z'_t \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z''_{tt} & x''_{tt} \\ z'_t & x'_t \end{vmatrix}^2}{(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)^3}. \quad (3)$$

Учитывая, что в формулах (2) и (3) в числителе задается квадрат векторного произведения векторов  $r_{tt}''$  и  $r_t'$ , то эти формулы можно переписать в следующем виде:

$$k^2 = \frac{(|r_{tt}''|/|r_t'| \sin 90^\circ)^2}{|r_t'|^6} = \frac{|r_{tt}''|^2 |r_t'|^2}{|r_t'|^6} = \frac{|r_{tt}''|^2}{|r_t'|^4}. \quad (4)$$

Отсюда:

$$k = \frac{|r_{tt}''|}{|r_t'|^2}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что для задания в заданной точке величины кривизны  $k$  необходимо вначале задать модуль первой производной  $|r_t'|$  и из (5) определить и задать необходимый модуль второй производной  $|r_{tt}''|$ .

Векторно-параметрическая кривая Безье 5-й степени задается формулой

$$r(t) = \sum_{i=0}^n a_i r_i t^i (1-t)^{(n-i)}, \quad (6)$$

где  $a_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$   $n=5$ .

Перестроим (6) в виде:

$$r(t) = \sum_{i=0}^5 A_i r_i t^i. \quad (7)$$

где

$$A_0 = r_0 \quad (7.0)$$

$$A_1 = 5(r_1 - r_0) \quad (7.1)$$

$$A_2 = 10(r_0 - 2r_1 + r_2) \quad (7.2)$$

$$A_3 = 10(r_3 + r_1 - r_0 - 3r_2) \quad (7.3)$$

$$A_4 = 5(r_0 - 4r_1 + 6r_2 - 4r_3 - r_4) \quad (7.4)$$

$$A_5 = (-r_0 + 5r_1 - 10r_2 + 10r_3 + 5r_4 + r_5) \quad (7.5)$$

В точке  $r_0(x_0, y_0, z_0)$   $t=0$ . При  $t=0$  получим:

$$r_t'(0) = 5(r_1 - r_0); \quad (8)$$

$$r_{tt}''(0) = 20(r_0 - 2r_1 + r_2). \quad (9)$$

При заданных  $r_0$  и  $r_0''$  из (8) и (9) получим:

$$r_1 = r_0 + \frac{r_0'}{5} \quad (10)$$

$$r_2 = 2r_1 - r_0 + \frac{r_0''}{20} \quad (11)$$

Используем симметрию (6).

Если заменить параметр  $t$  на  $t=1-u$  то  $1-t = u$ , и подставив в (6), получим формулу, симметричную к (6) в том смысле, что точки 3,4,5 и 2, 1, 0 поменяются соответственно местами. А также поскольку

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d^2r}{du^2} \frac{du}{dt} + \frac{dr}{du} \frac{d^2u}{dt^2} \\ \frac{du}{dt} &= -1, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = 0 \end{aligned}$$

то формулы (8) и (9) при  $t=1$  переписутся в виде:

$$r_t'(1) = -5(r_4 - r_5); \quad (12)$$

$$r_{tt}''(1) = -20(r_5 - 2r_4 + r_3). \quad (13)$$

Тогда на основании формул (12) и (13) в точке  $r_5$  ( $t=1$ ) будем иметь следующие зависимости:

$$r_4 = r_5 - \frac{r_5'}{5}; \quad (14)$$

$$r_3 = 2r_4 - r_5 - \frac{r_5''}{20}. \quad (15)$$

Таким образом формулы (12) – (15) полностью определяют сегмент Безье 5-й степени, который проходит через две точки  $r_0$  и  $r_5$  с заданными первыми и вторыми производными в них. Криволинейный обвод, образованный из таких состыкованных сегментов, будет сплайном с непрерывной кривизной вдоль обвода

**Выводы.** В статье получен результат аналитического проектирования обвода по заданному закону изменения кривизны.

### *Литература*

1. Ефимов Н. В. Высшая геометрия / Н. В. Ефимов. – М.: Издательство “Наука”. – 1971. – 576с.
2. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – М.: Физматгиз, 2002. – 472с.
3. Бадаев Ю.І. Керування кривою NURBS–кривої 3–го порядку за допомогою ваги контрольних вектор–точок / Ю. І. Бадаєв, А. О. Блиндарук // Зб. наук. Праць Київської державної академії водного транспорту. – К: КДАВТ, 2015. – №3(21). – С.103–105.

4. Бадаєв Ю.І. Можливості локальної модифікації гладкої NURBS – кривої / Ю. І. Бадаєв, А.О.Блиндарук // Труды XV международной научно–практической конференции “Современные информационные и электронные технологии”. – Одеса, 2014. – т.1. – С.26-27.
5. Бадаєв Ю.І. Компютерна реалізація проектування криволінійних обводів методом NURBS-технологій вищих порядків / Ю.І. Бадаєв, А. О. Блиндарук // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ. – Мелітополь, 2014. – С.3–6.

## **МОДЕЛЮВАННЯ СПЛАЙНІВ НА ОСНОВІ КРИВИХ БЕЗЬЄ 5-Ї СТЕПЕНІ З БЕЗПЕРЕРВНОЮ КРИВИНОЮ**

Бадаєв Ю.І., Ганношина І.М.

*Пропонується моделювання криволінійного обводу сегментами кривих Безьє 5-го ступеня за заданим точкового каркасу із заданими в них кривизнами і з забезпеченням безперервності кривини уздовж обводу.*

*Ключові слова: поліноміальний сегмент, сегмент кривої Безьє 5-ї степеня, кривина, перші і другі похідні, безперервність кривини.*

## **SIMULATION OF SPLINE FROM CURVES OF BEZIER OF THE 5th DEGREE WITH CONTINUOUS CURVATURE**

Badayev Y., Gannoshina I.

*It is proposed to simulate the curvilinear circumference of the Bezier curves of the 5th degree by segments of a given point skeleton with the curvatures given in them and ensuring the continuity of the curvature along the contour.*

*Keywords: polynomial segment, Bezier curve segment of the 5th degree, curvature, first and second derivatives, continuity of curvature.*