

УДК 515.2

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІДБИТТІВ ВІД ТОРСОВИХ ПОВЕРХОНЬ

Козак Ю.В.

*Київський національний університет будівництва і архітектури
(Україна)*

В роботі розглядаються дослідження побудови поверхонь відбитих променів від прямолінійних твірних торсових поверхонь. Побудова поверхонь відбитих променів актуальні в прикладних задачах акустики, світлотехніки, геліотехніки, де з урахуванням трансформації відбиваючої поверхні є можливість вирішувати специфічні прикладні задачі. В умовах проектування акустичного середовища, трансформовані поверхні дають можливість концентрувати або розсіювати звукову енергію, універсуалізувати призначення залів.

Ключові слова: акустика, поверхні відбитих променів, торсова поверхня.

Постановка проблеми. Завдяки дослідженням теорії звуку в кінці XIX та стрімкому розвитку акустики видовищних залів в XX сторіччі акустичне підсилення звуку досягається за рахунок відбиттів від поверхонь залів. Останні тенденції розвитку архітектури свідчать, що сучасні архітектори все більше використовують складні форми поверхонь як для фасадів будівель, так і для проектування внутрішнього простору. Відповідно, необхідно знаходити методи побудови відбиттів від поверхонь 2-го та вищих порядків. Це досягається за рахунок побудови поверхонь відбитих променів від твірних поверхонь відбиття, для чого вздовж цих твірних будуються поверхні нормалей. В статтях автора запропоновано систематизувати відбиваючі поверхні за типом поверхонь нормалей до їх твірних. Таким чином, до першого типу поверхонь відносяться розгортці, в загальному вигляді поверхні, торси. Вони мають велике практичне значення та широку перспективу застосування за рахунок можливості їх трансформації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В публікації [1] розглянуті способи побудови поверхонь відбитих променів за допомогою поверхонь нормалей до твірних відбиваючих поверхонь. Це дозволило розширити перелік відбиваючих поверхонь. В публікаціях [2,3] розглядаються торсові поверхні, методи їх побудови,

їх класифікація та можливості їх використання в якості відбиваючих поверхонь.

В статті [6] продовжено розгляд теоретичних питань утворення торсових поверхонь і їх властивостей, корисних для використання цих поверхонь в якості відбивачів сонячних променів.

В енциклопедії [7] показані дослідження поверхонь, їх аналітичний опис та візуалізація.

В довіднику [8] дається детальний аналіз торсових поверхонь, їх аналітичний опис, в [9] дається геометричний аналіз торсових поверхонь та їх класифікація.

Публікація [4] розглядає один із прикладів формоутворення поверхонь відбитих променів. За допомогою геометричного та аналітичного опису поверхонь відбитих променів можливо вирішити зворотню задачу по отриманню відбиваючих поверхонь при відомій поверхні відбитих променів. Це можливо зробити спираючись на систематизацію відбиваючих поверхонь по типу поверхонь нормалей до їх твірних [5].

Формулювання цілей статті. Загальне розширення кола відбиваючих поверхонь за рахунок включення розгортних поверхонь 2-го порядку та торсових поверхонь. Аналізується можливість використання розгортних поверхонь в якості трансформованих для універсалізації видовищних залів.

Основна частина. Торсові поверхні є лінійчаті розгортні поверхні, які можуть бути розгорнуті на площину всіма своїми точками без розривів та складок. Розгортною поверхнею є така, що створена однопараметричною сім'єю дотичних площин, створених при обкатці двох кривих або як множина дотичних до ребра звороту. Вздовж прямолінійних твірних торсів дотична площина не змінюється. В векторній формі торсова поверхня буде мати вигляд:

$$r = r(u, v) = a(v) + u l(v), \quad (1)$$

де $a(v)$ радіус ребра звороту, $l(v)$ – одиничний дотичний вектор, заданий в кожній точці ребра звороту. Координатні лінії u співпадають з прямолінійними твірними.

Можна вивести рівняння однопараметричного сімейства дотичних площин $M(x, y, z, v) = 0$ та рівняння торсу в неявному вигляді або рівняння ребра звороту:

$$a(v) = xi + yj + zk = x(v)i + y(v)j + z(v)k, \quad (2)$$

У конуса ребро звороту вироджується в точку – вершину конуса. У циліндричної поверхні ребро звороту є невласним.

Поверхні нормалей вздовж твірних торсових поверхонь являють собою плоский пучок паралельних нормалей. Поверхнею відбитих променів є плоский пучок відбитих променів, які перетинаються в уявному джерелі.

Знайдемо рівняння поверхні відбитих променів.

Зручно використати метод побудови за допомогою уявного джерела. Нехай джерело звуку буде $S(x_s, y_s, z_s)$. Якщо дотична площина представлена рівнянням:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3)$$

то уявне джерело буде лежати на продовженню перпендикуляру до площини симетрично відносно неї. Рівняння перпендикуляра:

$$\frac{x_p - x_s}{A} = \frac{y_p - y_s}{B} = \frac{z_p - z_s}{C}, \quad (4)$$

де x_p – основа перпендикуляру. З системи рівнянь проєкцій перпендикуляра на площину та рівняння дотичної площини знаходимо координати основи перпендикуляра x_p, y_p, z_p як точки перетину перпендикуляра і площини:

$$\begin{aligned} x_p &= -\frac{-B^2x_s - C^2x_s + AB y_s + AC z_s}{A^2 + B^2 + C^2}; \\ y_p &= -\frac{ABx_s - A^2y_s - C^2y_s + BC z_s}{A^2 + B^2 + C^2}; \\ z_p &= -\frac{ACx_s + BCy_s - A^2z_s + B^2z_s}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для знаходження координат уявного джерела $S'(x'_s, y'_s, z'_s)$, використовуємо формулу ділення відрізка навпіл (6), звідки виводимо координати уявного джерела (7):

$$x_p = \frac{x_s + x'_s}{2}, \quad y_p = \frac{y_s + y'_s}{2}, \quad z_p = \frac{z_s + z'_s}{2}. \quad (6)$$

$$x'_s = 2x_p - x_s, \quad y'_s = 2y_p - y_s, \quad z'_s = 2z_p - z_s. \quad (7)$$

Записується рівняння відбитого променя як прямої, що проходить через уявне джерело $S'(x'_s, y'_s, z'_s)$ та точку відбиття $A(x_a, y_a, z_a)$:

$$\begin{aligned} x &= x_a + (x'_s - x_a)t, \\ y &= y_a + (y'_s - y_a)t, \\ z &= z_a + (z'_s - z_a)t. \end{aligned} \quad (8)$$

При заміні координат $A(x_a, y_a, z_a)$ рівнянням твірної розгортної поверхні, отримуємо плоский пучок відбитих променів.

При зміні відбиваючої поверхні змінюються значення A, B, C, x_a, y_a, z_a . Так, для еліптичного конуса 2-го порядку $A = x_a^2/a^2, B = -y_a^2/b^2, C = z_a^2/c^2, x_a = at \cos u, y_a = bt \sin u, z_a = ct$, для еліптичного циліндру $A = x_a^2/a^2, B = y_a^2/b^2, C = 0, x_a = a \cos u, y_a = b \sin u, z_a = z$. Аналогічно виглядають рівняння для конічних та циліндричних поверхонь з криволінійними твірними з параболі, гіперболі, параболі Нейля, астроїди, ланцюгової лінії, спіраллю Архімеда та інші.

Щодо торсових поверхонь більш складних форм, написання рівнянь відбитих променів мають той самий алгоритм.

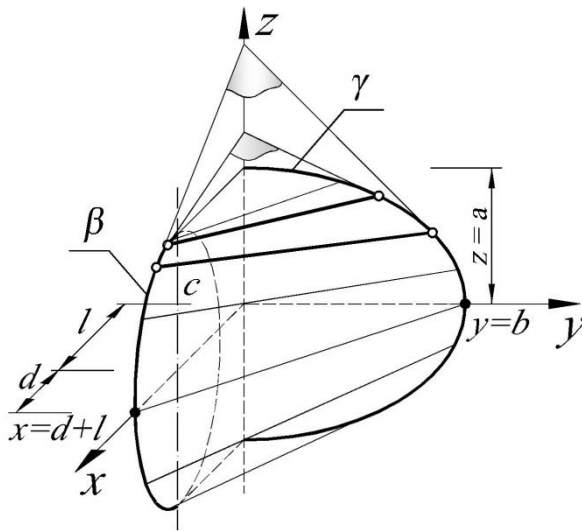


Рис. 1. Торс, отриманий обкаткою двох еліпсів β та γ ($a=c=l=2d$, $b=3d$)

Розглянемо (рис.1) приклад торса, отриманий обкаткою двох еліпсів, які лежать у взаємно перпендикулярних площинах, а їх осі співпадають з координатними осями [8]. Торс в якості напрямних має два еліпси:

$$\beta: x = l + d \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, y = 0 \text{ та}$$

$$\gamma: x = 0, y = b \sqrt{1 - z^2/a^2}.$$

Прямолінійні твірні пройдуть

через точку відповідної координати $z(\beta)$ та $z(\gamma)$, які зв'язані відношенням:

$$\gamma = \beta da^2 / (c^2 d + cl \sqrt{c^2 - \beta^2}), \quad (9)$$

де $-c \leq \beta \leq c$, $-a \leq \gamma \leq a$. Таким чином, задаючи точку еліпса β отримуємо відповідну точку еліпса γ . По одному з способів - точці та дотичній, двом дотичним або твірній та дотичній записується рівняння дотичної площини торса, яка приводиться до вигляду (3). По формулах 4-8 записується рівняння пучка відбитих променів.

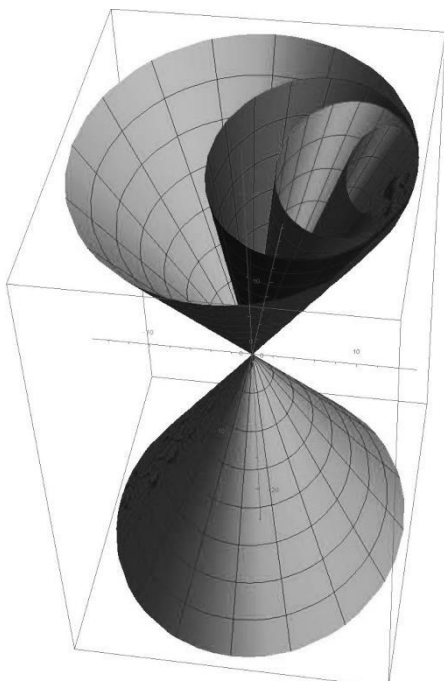


Рис. 2. Пучок конусів зі спільною прямолінійною твірною

Саме торсові поверхні можуть використовуватись як відбиваючі екрани з трансформацією самої форми екрану. Завдяки тому, що ці поверхні розгортні, зміна їх форми дозволяє спрямовувати відбиття в завданні звукооператором місця або розсіювати при необхідності. Отримані можливості можна використовувати для універсализації залів, змінюючи їх призначення відповідно замовленню, регулювати реверберацію в залежності від кількості глядачів та навіть отримувати деякі звукові ефекти, пов'язані з концентрацією звука.

Зважаючи на те, що торси отримуються обкаткою площин по

кривих, наприклад еліпсам, саме зміна параметрів напрямних кривих забезпечує необхідну трансформацію. Це видно на прикладі торса на рис.1, де від параметрів полуосей твірних еліпсів залежать відбиваючі властивості поверхні. На рис.2 показано пучок конусів 2-го порядку зі спільною прямолінійною твірною як приклад трансформації форми відбиваючої поверхні, яка отримується зміною параметрів рівняння конуса.

Висновки. В статті подані аналітичні описи пучків відбитих променів від твірних торсових поверхонь. Зазначені торсові поверхні можуть використовуватись як трансформовані. Подальші роботи можуть бути спрямовані в сторону досліджень інших типів відбиваючих поверхонь

Література

1. Подгорный А.Л. Поверхности отражённых лучей / А.Л. Подгорный // Прикладная геометрия и инженерная графика. Вып. 20. –К.: Будівельник, 1975. – С.13 -16.
2. Підгорний О.Л. Можливості використання торсових поверхонь в якості відбивачів сонячних променів / А.Л. Підгорний // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 80. – С. 11-15.
3. Обухова В.С. Конструктивні способи утворення алгебраїчних торсів 4-го класу / Обухова В.С., Підгорний О.Л. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип.4. – т.11. –Мелітополь: ТДАТА, 2000. – 122 с.
4. Козак Ю.В. Исследование отражающих поверхностей высших порядков в приложении к акустическому расчету помещений / Ю.В. Козак // Тези доповідей наукової кримської конференції. – Симферополь, 2005. – С.9–12.
5. Козак Ю.В. Дослідження поверхонь нормалей як засіб систематизації поверхонь відбиття / Ю.В. Козак // Енергоефективність в будівництві та архітектурі. – К.:КНУБА, 2013. – Вип.5. – С.66–69.
6. Підгорний О.Л. Можливості використання торсових поверхонь в якості відбивачів сонячних променів (продовження). О.Л. Підгорний // Науково-технічний збірник «Енергоефективність в будівництві та архітектурі»; відп. ред. П.М. Куліков. – Київ.: КНУБА, 2017. – Випуск 9. – С. 194-197.
7. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности и оболочки: Справочник / С.Н. Кривошапко. – М.: Издательство УДН, 1991. – 287 с.
8. Кривошапко С.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей / С.Н. Кривошапко, В.Н.Иванов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 556 с.

9. Михайленко В.Е. Формообразование оболочек в архитектуре / В.Е. Михайленко, В.С. Обухова, А.Л. Подгорный – К.: Будівельник, 1972. – 207 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЙ ОТ ТОРСОВЫХ РАЗВЕРТЫВАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Козак Ю. В.

В работе рассматриваются исследования построения поверхностей отраженных лучей от прямолинейных образующих торсовых поверхностей. Построение поверхностей отраженных лучей актуальны в прикладных задачах акустики, светотехники, гелиотехники, где с учетом возможности трансформации отражающей поверхности находятся решения специфических прикладных задач. В условиях проектирования акустической среды, трансформируемые поверхности дают возможность концентрировать или рассеивать звуковую энергию, универсализировать назначение залов.

Ключевые слова: акустика, поверхности отраженных лучей, торсовая поверхность.

GEOMETRICAL MODELLING OF REFLECTIONS FROM DEVELOPABLE SURFACES.

Kozak Y.

In the article research of reflected surfaces from linear generatrices of developable surfaces is considered. Drawing of surfaces of reflected rays is actual in acoustics, lighting engineering, geliotechnics, where transformable surfaces can be used. In acoustics the transformable surfaces can concentrate or diffuse sound energy and make halls more multipurpose.

Key words: acoustics, surface of reflected rays, developable surface.