УДК 514.18

КРИВЫЕ ПЕАНО В КОНСТРУИРОВАНИИ ОРНАМЕНТОВ

Ницын А.Ю., д.т.н.
НТУ «Харьковский политехнический институт» (Украина)

Рассмотрено приложение кривых Пеано к построению орнаментов, имеющих эстетическую ценность. Приведено доказательство утверждения о том, что кривая Гильберта является самоподобным фракталом и вычислена её фрактальная размерность. Предложен авторский вариант кривой Пеано, которая образует орнамент в виде меандра, целиком заполняющего плоскость.

Ключевые слова: кривая Пеано, орнамент, фрактальная геометрия.

Постановка проблемы. Математика знает много геометрических образов, которые могут быть использованы для создания орнаментов, а именно: множество Жюлиа, множество Мандельброта и другие. Однако большинство известных геометрических образов представляет собой плоскую фигуру, площадь которой является конечной величиной. Вместе с тем в графическом дизайне особую ценность имеют орнаменты, целиком заполняющие плоскость. Одними из геометрических образов, проходящих через все точки плоскости, являются кривые Пеано. Таким образом, разработка кривых Пеано, которые могут быть основой для конструирования орнаментов, является актуальной задачей графического дизайна.

Анализ последних исследований и публикаций. К сожалению, литературы, которая раскрывала бы технологию создания кривых, заполняющих плоскость, не существует. Краткие сведения о таких кривых разбросаны по монографиям, посвящённым теории множеств, теории функций действительного переменного и фрактальной геометрии [1–6].

Формулирование целей статьи. Таким образом, цель статьи – продолжение работы по построению кривых Пеано, которые образуют орнаменты, имеющие эстетическую ценность.

Основная часть. Когда в 1882 году французский математик Камиль Жордан предложил топологическое определение линии, согласно которому линия – это непрерывный образ отрезка, лучшие математики того времени предприняли многочисленные попытки найти примеры, не подпадающие под его определение. Наконец, в

1890 году итальянскому математику Джузеппе Пеано удалось построить кривую, которая, с одной стороны, является непрерывным отображением отрезка на плоскость, а с другой стороны, ни на что не похожа, потому что целиком заполняет некоторый квадрат (то есть является плоской фигурой). Надо ли говорить, что открытие Джузеппе Пеано произвело сенсацию в математическом мире, и в 1891 году немецкий математик Давид Гильберт предложил конструкцию, которая стала классическим примером кривой Пеано. Конструкция представляет собой ломаную прямую линию, проходящую через все точки некоторого квадрата (то есть целиком заполняющая его внутренность). При этом под точками, находящимися внутри квадрата, понимается точка, расположенная в его центре, а заполнение квадрата ломаной прямой линией достигается за счёт его бесконечного разбиения на несколько равных квадратов меньшей площади. Количество квадратов N, построенных на i-том шаге итерации, определяется по формуле:

$$N = 4^i, \; i = 1, \cdots, n. \tag{1}$$

Покажем на рис. 1 начальные шаги построения конструкции, предложенной Давидом Гильбертом. Предельная кривая, получающаяся в результате бесконечного разбиения исходного квадрата, и будет кривой Пеано, проходящей через все его точки [4].

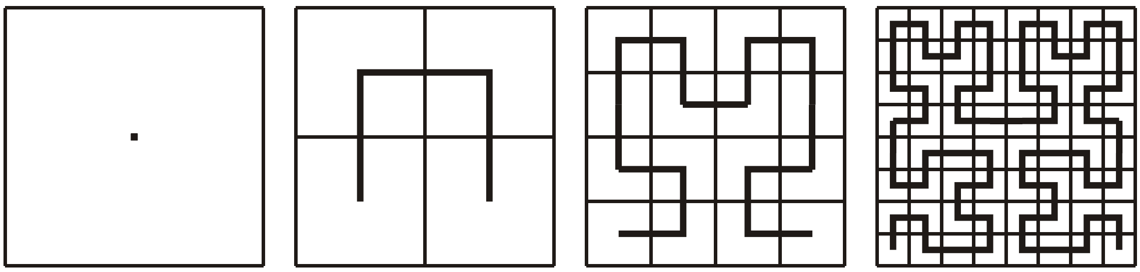

Рис. 1. Кривая Гильберта, заполняющая квадрат, после 4-х итераций

Впрочем, нам дела нет до того, что кривая Пеано, рассматриваемая как плоская фигура, не есть множество, нигде не плотное на плоскости, а является жордановой, но не канторовой кривой, или кривая Пеано есть в точности локально связный континуум (то есть континуум, каждая точка которого обладает сколь угодно малой связной окрестностью). Главное, с нашей точки зрения, состоит в том, что с помощью кривых Пеано можно построить орнаменты, целиком заполняющие плоскость и обладающие замечательными эстетическими свойствами.

Действительно, если вместо бесконечного разбиения исходного квадрата, показанного на рис. 1 взять его фрактальное расширение, то в пределе получим ломаную прямую линию, обходящую всю плоскость. Фрактальное расширение квадрата состоит в том, что на каждом последующем шаге итерации площадь квадрата больше площади квадрата, полученного на предыдущем шаге итерации, в 4 раза, то есть на i-том шаге итерации количество N квадратов, площадь которых равна площади исходного квадрата, вычисляется по формуле (1). Покажем на рис. 2 начальные шаги построения кривой Пеано, предложенной Давидом Гильбертом.

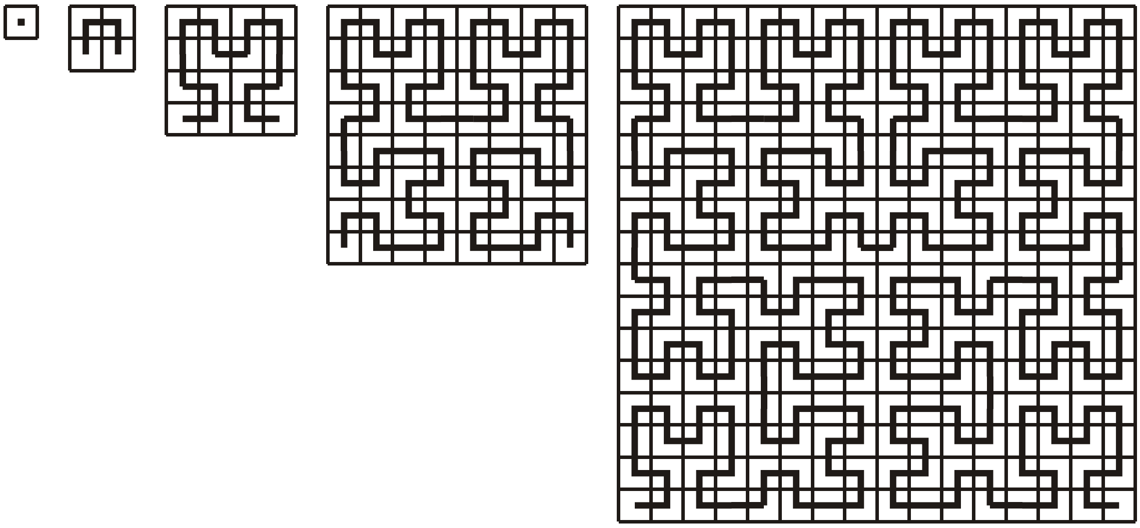

Рис. 2. Кривая Гильберта, заполняющая плоскость,
после 4-х итераций

Обратим внимание, что на каждой последующей итерации кривая, полученная на предыдущей итерации, подвергается следующим аффинным преобразованиям (при условии, что исходная фигура вписывается в единичный квадрат):

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^i \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^i \\ -2^i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2^i \end{pmatrix},$$

где i – номер итерации.

Поэтому на каждой последующей итерации вновь образованная кривая является увеличенной копией кривой, построенной на предыдущей итерации. Следовательно, кривая Пеано, показанная на рис. 2, является самоподобным фракталом.

Вычислим её фрактальную размерность. Поскольку кривая Пеано, представленная на рис. 2, отличается от кривой Пеано, представленной на рис. 1, лишь масштабом изображения, их фрактальные размерности равны. Вычислим фрактальную размерность кривой Пеано, показанной на рис. 1. Пусть длина стороны исходного квадрата равна единице. Как следует из рис. 1, количество отрезков ломаной прямой линии и их длина на n-ном шаге итерации вычисляются по формулам:

$$N_n = 4^n; \ \delta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Представим фрактальную размерность ломаной прямой линии как предельное отношение логарифма числа ее отрезков к логарифму их длины при стремлении числа итераций к бесконечности [6]

$$D = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln N_n}{\ln \delta_n}.$$

Вычислим фрактальную размерность кривой Пеано, представленной на рис. 1

$$D = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = 2.$$

Следовательно, фрактальная размерность кривой Пеано равна топологической размерности плоскости $D = 2$. Это доказывает утверждение о том, что кривая Пеано, представленная на рис. 2, целиком заполняет плоскость (то есть является плоской фигурой).

Разумеется, можно придумать сколь угодно много кривых Пеано. Например, в работе [4], кроме рассмотренной нами кривой Гильберта, представлены кривые Серпинского и Госпера.

Мы, в свою очередь, предлагаем авторский вариант кривой Пеано, показанный на рис. 3. Эта кривая замечательна тем, что зрительная иллюзия создаёт впечатление, будто её изображение состоит из множества меандров, вписанных в квадраты, в то время как в действительности на рис. 3 представлена кривая, проходящая через все точки плоскости. Это существенно отличает её от древнеримских и византийских орнаментов, на которых меандр, включающий в себя элемент изображения, показанного на рис. 3, заполняет бесконечно длинную полосу.

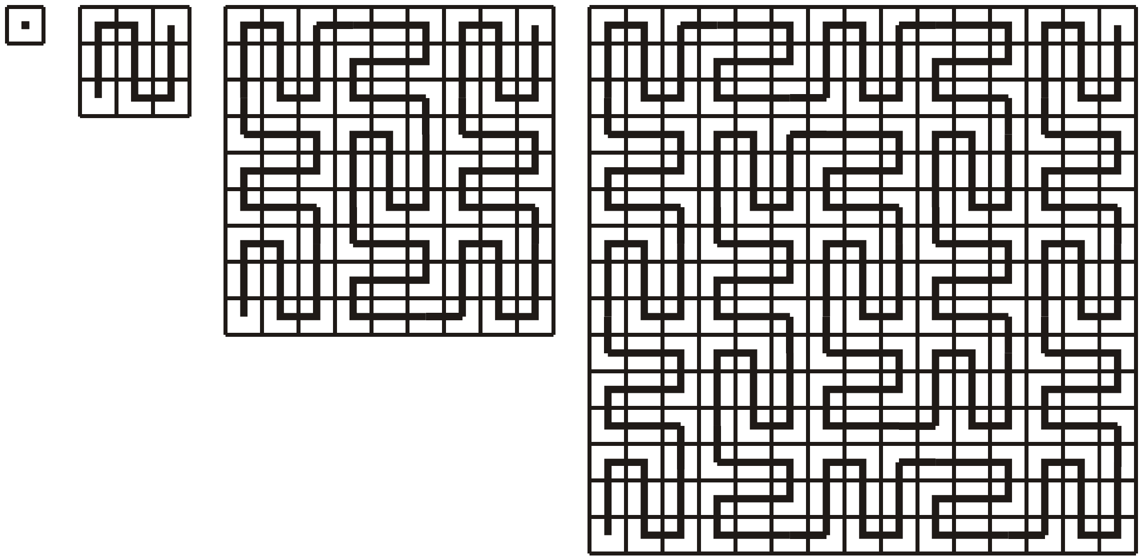

Рис. 3. Авторский вариант кривой Пеано
после 4-х итераций

Выводы. Таким образом, в статье приведен известный пример кривой Пеано, а также предложен её вариант, ещё не описанный в литературе. Кроме того, в статье дано доказательство утверждения о том, что кривая Пеано, предложенная Гильбертом, – это самоподобный фрактал, и вычислена её фрактальная размерность. Обратим внимание, что статья содержит варианты кривой Пеано, заполняющей квадрат. Однако, как известно, плоскость можно замостить не только квадратами, но и правильными шестиугольниками (или правильными треугольниками). Поэтому следующая статья будет посвящена построению кривой Пеано, заполняющей правильный шестиугольник (или правильный треугольник), и конструированию на её основе орнаментов, которые могут быть полезными в дизайне ценных бумаг.

Литература

1. Лузин Н.Н. Теория функций действительного переменного / Н. Н. Лузин. – М.: Учпедгиз, 1948. – 319 с.
2. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. – М.: Наука, 1977. – 367 с.
3. Пайтген Х.О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Х.О. Пайтген, П.Х. Рихтер. – М.: Мир, 1993. – 176 с.
4. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов / А.Д. Морозов. [2-е изд.]. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.

5. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
6. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Р. Кроновер. – М.: Техносфера, 2006. – 488 с.

КРИВЫЕ ПЕАНО В КОНСТРУИРОВАНИИ ОРНАМЕНТОВ

Ніцин О.Ю.

Розглянуто застосування кривих Пеано до побудови орнаментів, що мають естетичну цінність. Наведено твердження про те, що крива Гілберта є самоподібним фракталом і обчислено її фрактальну розмірність. Запропоновано авторський варіант кривої Пеано, яка утворює орнамент у вигляді меандру, що цілком заповнює площину.

Ключові слова: крива Пеано, орнамент, фрактальна геометрія.

CURVES OF PEANO IN CONSTRUCTION OF ORNAMENTS

Nitsyn A.

The application of curves of Peano to the construction of ornaments that is an aesthetic significance is considered. Demonstration of maintenance that curve of Gilbert is a selfsimilar fractal is resulted and its fractal dimension is calculated. The author's variant of curve of Peano, which forms an ornament as meander, wholly filling a plane, is offered.

Keywords: curve of Peano, ornament, fractal geometry.