

УДК 514.18

УТВОРЕННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ, ЯКІ ЛЕЖАТЬ НА ПОВЕРХНІ УЯВНОГО КОНУСА

Пилипака С.Ф., д.т.н.,

Муквич М.М., к.т.н.*

*Національний університет біоресурсів і природокористування
України (м. Київ, Україна)*

Здійснено аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні уявного конуса із комплексною величиною кута нахилу твірних, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній.

Ключові слова: мінімальна поверхня, ізометрична сітка координатних ліній, лінійний елемент поверхні, ізотропна лінія.

Постановка проблеми. Геометрична форма мінімальної поверхні, середня кривина у всіх точках якої дорівнює нулю, забезпечує рівномірний розподіл зусиль в оболонці та додаткову жорсткість. Напруженість у кожній точці мінімальної поверхні є сталою величиною, тому її форма залежить тільки від форми контуру, через який проведено мінімальну поверхню [1, с. 43]. Рівність нулю величини середньої кривини мінімальної поверхні є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром).

Удосконалення чисельних методів розв'язування диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа [2, р. 683], яке визначає мінімальну поверхню, але у загальному випадку не інтегрується, є одним із сучасних напрямків дослідження аналітичного опису мінімальних поверхонь [3]. У роботах [1,4] розроблено графо-аналітичні методи аналітичного опису поверхонь, близьких до мінімальних, при проектуванні архітектурних конструкцій.

Аналітичний опис мінімальних поверхонь можна здійснювати за допомогою функцій комплексної змінної, отримуючи параметричні рівняння мінімальних поверхонь у вигляді елементарних функцій. У даній роботі реалізовано метод аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналітичний опис неперервного каркасу мінімальних поверхонь за допомогою функцій

* Науковий консультант – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

комплексної змінної пов'язаний із знаходженням параметричних рівнянь ізотропних ліній нульової довжини [5, с. 144]. Моделювання ізотропних ліній за допомогою фундаментальних сплайнів розглянуто у роботі [6].

Можливість аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній, потребує дослідження для кожної поверхні обертання. Вказаній проблемі присвячено ряд робіт [7, 8] авторів даної статті. Розширення способів аналітичного опису ізотропних ліній та мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної є важливою умовою для розв'язання проблеми конструювання неперервного каркасу мінімальних поверхонь.

Формулювання цілей статті. Знайти аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні уявного конуса, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, із комплексною величиною кута нахилу твірних.

Основна частина. Параметричні рівняння конуса, віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній мають вигляд [9]:

$$X(t;v) = e^{t \cos \beta} \cdot \cos v; \quad Y(t;v) = e^{t \cos \beta} \cdot \sin v; \quad Z(t;v) = e^{t \cos \beta} \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (1)$$

$t \in R, v \in [0; 2\pi), \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ – величина кута нахилу твірних конуса до

площини його основи. Нехай $\beta = a + b \cdot i$, де $a, b \in R; i$ – уявна одиниця. Тоді параметричні рівняння поверхні уявного конуса, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, із комплексною величиною $\beta = a + b \cdot i$ кута нахилу твірних конуса мають вигляд:

$$\begin{aligned} X(t;v) &= e^{t \cos(a+b \cdot i)} \cdot \cos v; \\ Y(t;v) &= e^{t \cos(a+b \cdot i)} \cdot \sin v; \\ Z(t;v) &= e^{t \cos(a+b \cdot i)} \cdot \operatorname{tg}(a + b \cdot i). \end{aligned} \quad (2)$$

Розкладемо на множники вираз лінійного елемента [5, с. 40] поверхні уявного конуса (2), що визначає довжину будь-якої кривої, яка лежить на його поверхні:

$$ds^2 = e^{2 \cdot u \cdot \cos(a+b \cdot i)} \cdot (dv - i \cdot dt)(dv + i \cdot dt), \quad (3)$$

де i – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримуємо:

$$v = i \cdot t + C \quad \text{або} \quad v = -i \cdot t + C, \quad (4)$$

де C – довільна стала інтегрування.

Для спрощення аналітичного опису будемо вважати значення довільної сталої $C = 0$. Тоді при підстановці виразу $v = i \cdot t$ у рівняння (2) отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної лінії, яка

лежить на поверхні конуса із комплексною величиною $\beta = a + b \cdot i$ кута нахилу твірних:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{t \cos(a+b \cdot i)} \cdot \cos t; & y(t) &= e^{t \cos(a+b \cdot i)} \cdot \sin t; \\ z(t) &= e^{t \cos(a+b \cdot i)} \cdot \operatorname{tg}(a + b \cdot i). \end{aligned} \quad (5)$$

Здійснимо для функцій комплексної змінної (5) заміну: $t = u + i \cdot v$. Відокремивши дійсну та уявну частину, отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= e^{u \cdot \cos a \cdot \operatorname{ch} b + v \cdot \sin a \cdot \operatorname{sh} b} \cdot [\operatorname{ch} u \cdot \cos v \cdot \cos(v \cos a \operatorname{ch} b - \\ &\quad - u \sin a \operatorname{sh} b) - \operatorname{sh} u \cdot \sin v \cdot \sin(v \cos a \operatorname{ch} b - u \sin a \operatorname{sh} b)]; \\ Y(u, v) &= -e^{u \cdot \cos a \cdot \operatorname{ch} b + v \cdot \sin a \cdot \operatorname{sh} b} \cdot [\operatorname{ch} u \cdot \sin v \cdot \cos(v \cos a \operatorname{ch} b - \\ &\quad - u \sin a \operatorname{sh} b) + \operatorname{sh} u \cdot \cos v \cdot \sin(v \cos a \operatorname{ch} b - u \sin a \operatorname{sh} b)]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Z(u, v) &= \frac{e^{u \cdot \cos a \cdot \operatorname{ch} b + v \cdot \sin a \cdot \operatorname{sh} b}}{\cos(2(a + bu)) + \operatorname{ch}(2bv)} \cdot [\sin(2(a + bu)) \cdot \cos(v \cos a \operatorname{ch} b - \\ &\quad - u \sin a \operatorname{sh} b) - \operatorname{sh}(2bv) \cdot \sin(v \cos a \operatorname{ch} b - u \sin a \operatorname{sh} b)]. \end{aligned}$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned} X^*(u, v) &= e^{u \cdot \cos a \cdot \operatorname{ch} b + v \cdot \sin a \cdot \operatorname{sh} b} \cdot [\operatorname{ch} u \cdot \cos v \cdot \sin(v \cos a \operatorname{ch} b - \\ &\quad - u \sin a \operatorname{sh} b) + \operatorname{sh} u \cdot \sin v \cdot \cos(v \cos a \operatorname{ch} b - u \sin a \operatorname{sh} b)]; \\ Y^*(u, v) &= e^{u \cdot \cos a \cdot \operatorname{ch} b + v \cdot \sin a \cdot \operatorname{sh} b} \cdot [-\operatorname{ch} u \cdot \sin v \cdot \sin(v \cos a \operatorname{ch} b - \\ &\quad - u \sin a \operatorname{sh} b) + \operatorname{sh} u \cdot \cos v \cdot \cos(v \cos a \operatorname{ch} b - u \sin a \operatorname{sh} b)]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Z^*(u, v) &= \frac{e^{u \cdot \cos a \cdot \operatorname{ch} b + v \cdot \sin a \cdot \operatorname{sh} b}}{\cos(2(a + bu)) + \operatorname{ch}(2bv)} \cdot [\sin(2(a + bu)) \cdot \sin(v \cos a \operatorname{ch} b - \\ &\quad - u \sin a \operatorname{sh} b) + \operatorname{sh}(2bv) \cdot \cos(v \cos a \operatorname{ch} b - u \sin a \operatorname{sh} b)]. \end{aligned}$$

На рис.1 (а, б) зображено мінімальні поверхні, побудовані за рівняннями (6) для значень кута нахилу твірних: $\beta = 0,1 + 0,8 \cdot i$ та $\beta = 0,8 \cdot i$ відповідно, при $C = 0$; $u \in [-3; \dots 0.5]$; $v \in [-1; \dots 18]$.

Вираз лінійного елемента поверхні (2) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2 = e^{2 \cdot u \cdot \cos(a+b \cdot i)} \cdot (dt - i \cdot dv)(dt + i \cdot dv). \quad (8)$$

Підставивши вирази $t = i \cdot v + C$ або $t = -i \cdot v + C$, отримані із (8), у параметричні рівняння поверхні (2), отримаємо рівняння двох інших сімей уявних ізотропних ліній. Для кожного значення C за допомогою знайдених ізотропних ліній можна побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них, які характеризуються спільними метричними властивостями та спільними властивостями кривини поверхні.

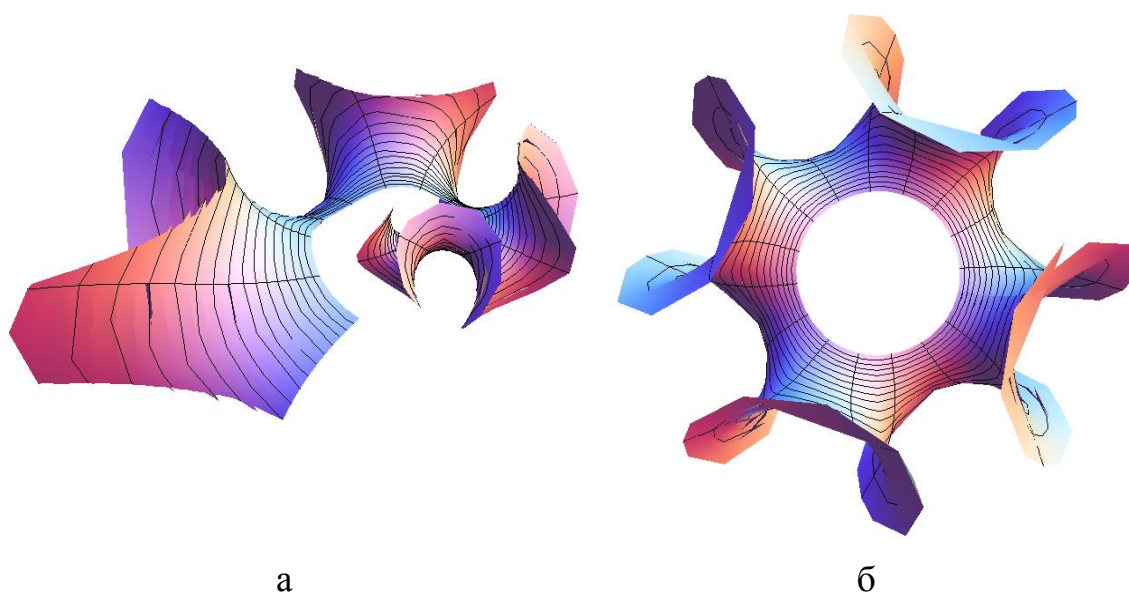


Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь:

- а) мінімальна поверхня, побудована за рівняннями (6) для $\beta = 0,1 + 0,8i$;
 б) мінімальна поверхня, побудована за рівняннями (6) для $\beta = 0,8i$

Висновки. На поверхні уявного конуса, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, із комплексною величиною кута нахилу твірних, для кожного значення C можна побудувати чотири сім'ї ізотропних ліній, і кожній лінії поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднати до неї. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні.

Література

1. Михайленко, В.Е. Конструирование форм современных архитектурных конструкций [Текст] / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалёв. – Киев: Будівельник, 1978. – 112 с.
2. Математическая энциклопедия [гл.ред. И. М. Виноградов] .– Т. 3. – М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1982. – С. 683–690.
3. Гацунаев М.А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности [Текст] / М.А. Гацунаев, А.А. Клячин // Уфимский мат. журнал. – 2014. – Т. 6. – №3. – С. 3-16.
4. Абдюшев А.А. Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности [Текст] / А.А. Абдюшев, И.Х. Мифтахутдинов, П.П. Осипов // Известия КазГАСУ. – 2009. – №2(12). – С. 86-92.
5. Фиников С. П. Теория поверхностей [Текст] / С. П. Фиников. – М.– Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
6. Аушева Н.М. Изотропні фундаментальні сплайни [Текст] / Н.М. Аушева // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць /

- МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016.– №6. – С. 3–7.
7. Пилипака С.Ф. Конструирование минимальных поверхностей с помощью изотропных кривых, лежащих на поверхности тора [Текст] / С.Ф. Пилипака, Н.Н. Муквич // MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. – Vol. 18, No 3. – Lublin – Rzeszov, 2016. – С.101–110.
 8. Пилипака С.Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання астроїди / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016.– №6. – С. 91–95.
 9. Муквич М.М. Конструювання мінімальних поверхонь за допомогою ізотропної кривої, яка лежить на конусі [Текст] / М.М. Муквич // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". – Луцьк: видавництво Луцького національного технічного університету, 2015. – № 48. – С. 155–158.

ОБРАЗОВАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ, ЛЕЖАЩИХ НА ПОВЕРХНОСТИ МНИМОГО КОНУСА

Пилипака С.Ф., Муквич Н.Н.

Получено аналитическое описание минимальных поверхностей с помощью изотропных линий, лежащих на поверхности мнимого конуса, отнесенной к изометрической сети координатных линий, с комплексной величиной угла наклона образующих.

Ключевые слова: минимальная поверхность, изометрическая сеть координатных линий, линейный элемент поверхности, изотропная линия.

FORMATION OF MINIMAL SURFACE USING ISOTROPIC CURVED, LYING ON IMAGINARY CONE

Pylypaka S., Mukvich M.

An analytical description of minimal surfaces by means of isotropic lines lying on the surface of an imaginary cone, referred to the isometric grid of the coordinate lines, with a complex value of the slope angle of generators is obtained.

Key words: minimal surface, isometric grid of the coordinate lines, linear element of a surface, isotropic line.