

УДК 514.182.7:519.65:004.9

## НАХОЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Спиринцев Д.В., к.т.н. \*

Найдыш А.В., д.т.н.

*Мелитопольская школа прикладной геометрии,*

*Мелитопольский государственный педагогический университет*

*им. Б. Хмельницкого (Украина),*

Караев А.И., д.т.н.

*Таврический государственный агротехнологический университет*

*(г. Мелитополь, Украина)*

***В работе рассматривается вопрос нахождения дополнительных точек для треугольников триангуляции, используемых в дальнейшем для получения интерполяционной поверхности.***

***Ключевые слова: триангуляция, треугольный элемент, дополнительные точки, интерполирующая поверхность.***

***Постановка проблемы.*** В отличие от цифровых представлений точечных, линейных и двумерных объектов, трехмерные объекты требуют особых форм представления, т.к. их местоположение описывается не только двумерными, но и высотными координатами. К наиболее распространенному типу трехмерных объектов относится топографический рельеф земной поверхности [2]. При помощи трехмерных объектов могут быть также смоделированы карты плотности населения, атмосферного давления, влажности и т.п. Однако, трехмерные модели традиционно связывают с цифровыми моделями рельефа (digital elevation model - DEM). Цифровые модели рельефа позволяют по конечному набору выборочных точек определять возвышение, крутизну склона, направление ската в произвольной точке на местности [3]. Возможно выявление особенностей местности – бассейнов рек, дренажных сетей, пиков, впадин и т.п. Такие модели широко применяются во многих процедурах ГИС-анализа: при выборе места строительства зданий и коммуникаций, в анализе дренажных сетей, в анализе видимости, при выборе маршрута движения по пересеченной местности. Особенно широко цифровые модели рельефа применяются в гидрологии.

***Анализ последних исследований и публикаций.*** В

---

\* Научный консультант – д.т.н., профессор Найдыш А.В.

геоинформационных системах поверхности обычно описываются при помощи растровых моделей и триангуляционных сетей [1]. В растровых моделях выборочные точки расположены в узлах регулярной растровой решетки, а в триангуляционных сетях – располагаются нерегулярно так, чтобы наилучшим образом “обогнуть” поверхность (отсюда название – triangulated irregular networks – TIN). Интерполирующая триангуляция поверхности образует редкую сетку треугольников. Интерполирующая поверхность необходима для расчета сечений значений  $z$  в требуемых точках области определения, а также для визуализации [2,3]. Система пространственных треугольников позволяет очень просто решать эти задачи, но получаемое кусочно-линейное приближение поверхности является слишком грубым (рис. 1,а).

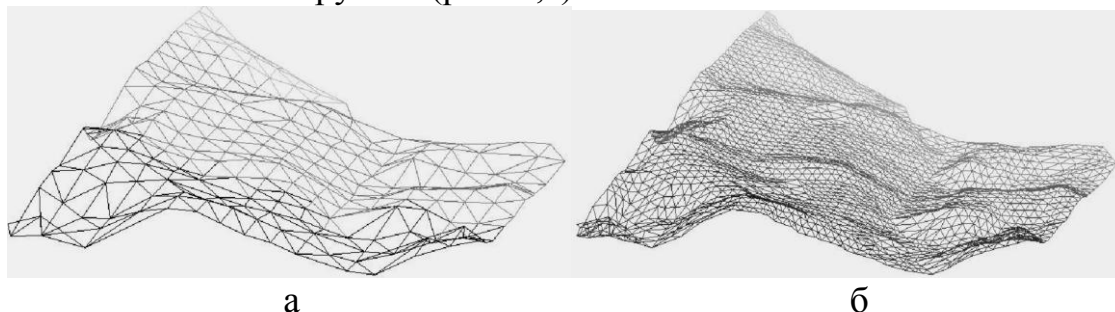


Рис.1. Триангулированная поверхность

Поэтому возникает задача построения интерполирующей поверхности, которую можно использовать для введения дополнительного разбиения каждого треугольника на несколько новых треугольников. Новые узловые точки не должны лежать в плоскости треугольника и используются для сглаживания поверхности (рис. 2). После разбиения триангулированная поверхность становится «более гладкой» (рис. 1,б).

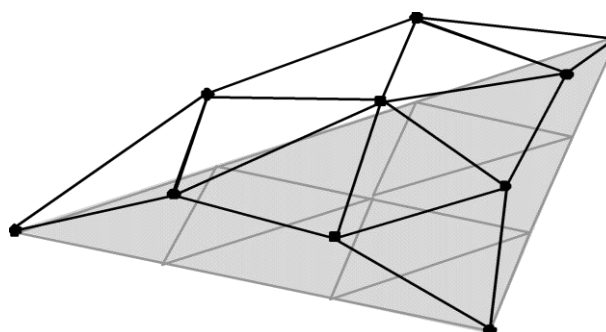


Рис. 2. Треугольник триангуляции с добавленными точками

Актуальными при этом является задача размещения точек, добавленных на ребрах, а также тот факт, что эти точки должны быть общими для двух треугольников, опирающихся на одно ребро.

**Формулирование целей статьи.** Целью статьи является решения задачи размещения точек на треугольнике триангуляции, содержащего точки эллиптического типа.

**Основная часть.** Рассмотрим произвольный треугольник

триангуляции (рис. 3). Каждый треугольник может иметь единичную нормаль  $\vec{n}_i$  (рис. 3). Для каждой узловой точки можно вычислить величину псевдонормали, как среднее арифметическое единичных нормалей к треугольникам, опирающимся на эту вершину. Имея псевдонормаль каждой вершины треугольника, можно получить касательные плоскости для каждой узловой точки (рис. 3).

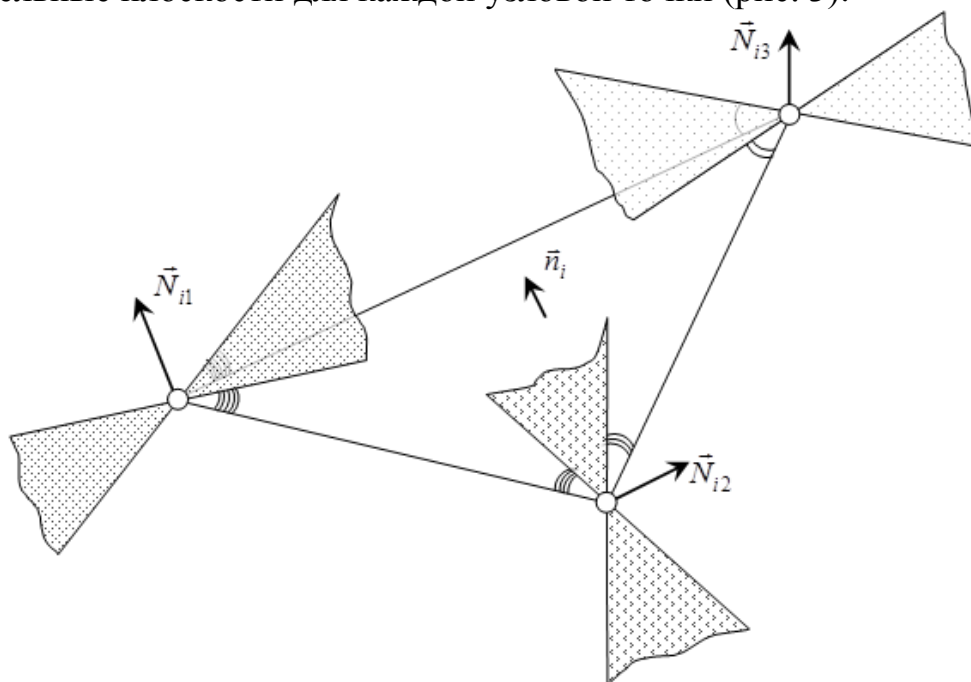


Рис. 3. Треугольный элемент, для которого представлены для всех трех вершин псевдонормали и касательные плоскости

Одной из задач для дальнейшего использования интерполирующей поверхности является задача нахождения промежуточных точек на каждой стороне треугольника триангуляции.

Рассмотрим сторону треугольника триангуляции. В качестве дополнительных условий будут выступать касательные плоскости в каждом из узлов треугольника триангуляции. В разрезе одной из сторон треугольника, их можно представить в виде касательных (рис. 4), направленных к звену АВ под углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Искомую моделируемую кривую будем искать в виде кривой второго порядка (рис. 5) в виде:  $f(x) = ax^2 + bx, (c=0)$ .

Рассмотрим независимо левую и правую ветви (рис. 5). Разобьем левую ветвь на  $N_L$  интервалов, а правую ветвь на  $N_R$  интервалов таким образом, что  $N_L + N_R = N$  – количество интервалов разбиения звена. Величины  $N_L$  и  $N_R$  определим из следующих соображений (рис.4).

Треугольник ABC (рис. 4) образован двумя касательными  $y_1$  и  $y_2$ , проведенными к звену АВ и так же являющихся касательными к

моделируемой кривой. Уравнения касательных определяются выражениями:

$$y_1 = \operatorname{tg}\alpha \cdot x, \quad y_2 = -\operatorname{tg}\beta \cdot x + L \cdot \operatorname{tg}\beta,$$

где  $L$  – длина звена АВ.

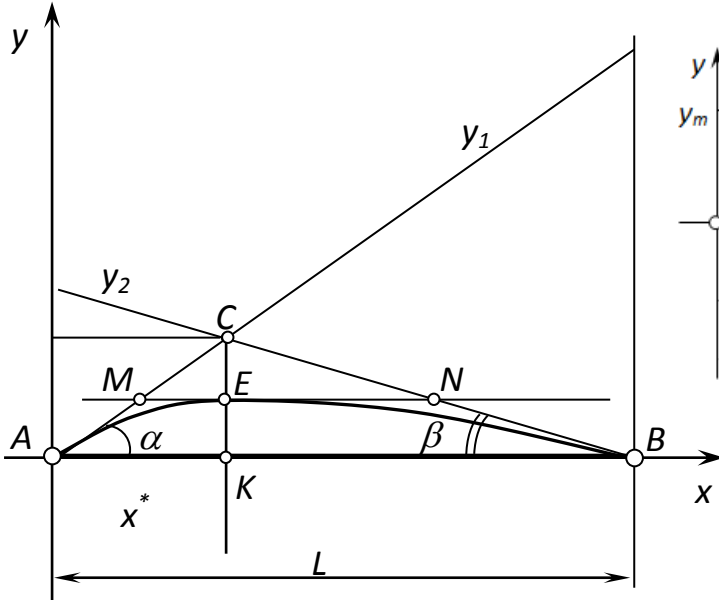


Рис. 4.

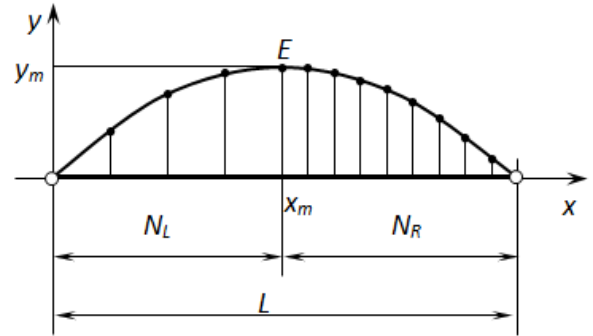


Рис. 5.

В т. С. Выполняется условие:  $y_1 = y_2$ , т.е.:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot x^* = -\operatorname{tg}\beta \cdot x^* + L \cdot \operatorname{tg}\beta, \text{ отсюда } x^* = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} \cdot L.$$

Тогда ордината т. С:

$$y^* = \frac{\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} \cdot L.$$

Отношение  $x^*/L$  покажет смещение вершин искомой моделируемой кривой. Назовем данное отношение  $x^*/L = \xi$  – коэффициентом смещения. Если  $\xi = 0,5$ , то вершина искомой кривой расположена по середине звена АВ. Если  $\xi < 0,5$  – вершина смещена влево от центра, если  $\xi > 0,5$  – вершина смещена вправо от центра. В работе предлагается с помощью коэффициента смещения определять  $N_L$  и  $N_R$  по следующим формулам:

$$N_L = \xi \cdot N,$$

где  $N_L$  округляется до ближайшего целого значения. Тогда:

$$N_R = N - N_L.$$

Проведем в треугольнике АВС среднюю линию  $MN \parallel AB$ . Будем считать, что т. Е ( $E = MN \cap CK$ ) является вершиной искомой моделируемой кривой, а  $MN$  для нее касательная в т.Е.

Если считать точку E, имеющая координаты:  $\begin{cases} x_E = x^* \\ y_E = \frac{1}{2} y^* \end{cases}$  –

точкой экстремума кривой  $f(x) = ax^2 + bx$ , то:

$$\begin{cases} x_E = -\frac{b}{2a} \\ y_E = -\frac{b^2}{4a} \end{cases}, \text{отсюда} \quad \begin{cases} a = -\frac{y_E}{x_E^2} \\ b = 2\frac{y_E}{x_E} \end{cases}, \text{тогда } f(x) = -\frac{y_E}{x_E^2} \cdot x^2 + 2\frac{y_E}{x_E} \cdot x.$$

Перейдем к безразмерным величинам вдоль оси Oх:  $\frac{x^*}{N_L} = k_1$  –  
для левой ветви;  $\frac{x^*}{N_R} = k_2$  – для правой ветви.

Тогда, для нахождения дополнительных точек, с шагом  $\Delta = \frac{L}{N}$ , на каждом ребре треугольника триангуляции, достаточно будет использовать следующие зависимости:

Для левой ветви:

$$\begin{cases} x = k_1 \cdot i, \quad i = \overline{0, N_L}; \\ f(x) = -\frac{y^*}{2(x^*)^2} \cdot x^2 + \frac{y^*}{x^*} \cdot x. \end{cases}$$

Для правой ветви:

$$\begin{cases} x = k_2 \cdot j, \quad j = \overline{0, N_R}; \\ f(x) = -\frac{y^*}{2(x^*)^2} \cdot x^2 + \frac{y^*}{x^*} \cdot x. \end{cases}$$

Результат предложенного в работе способа получения дополнительных точек на треугольнике триангуляции представлено на рис. 6 (исходные данные:  $\alpha=60^\circ$ ,  $\beta=30^\circ$ ,  $L=31$ ,  $N=15$ ).

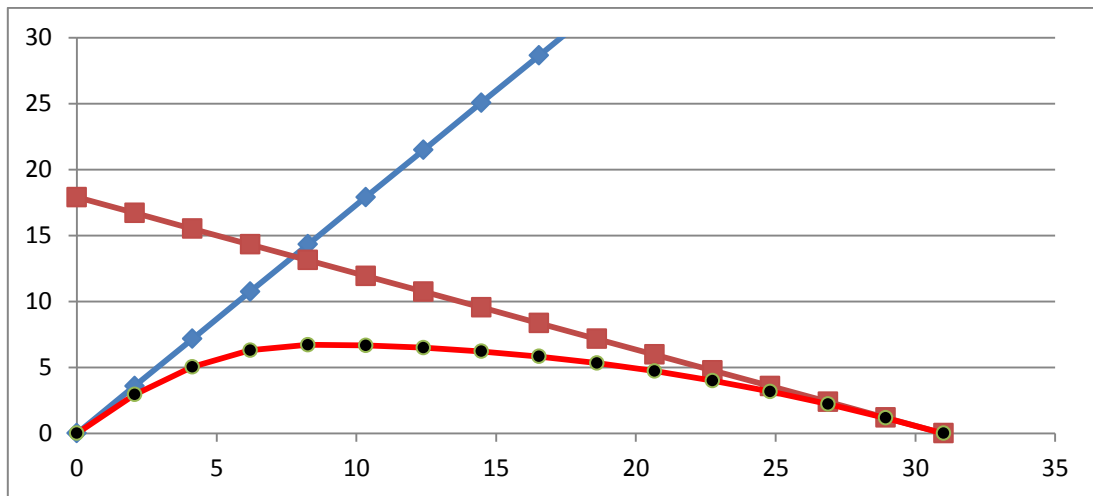


Рис.6. Тестовый пример получения дополнительных точек для одного ребра треугольника

**Выводы.** В работе предложен способ получения дополнительных точек для треугольников триангуляции, которые будут использоваться в дальнейшем для получения интерполирующей поверхности.

### **Литература**

1. Красильников Н.Н. Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений: учеб. пособие. - Спб.: БХВ-Петербург, 2011. – 608с.
2. Петин А.Н. Геоинформатика а рациональном недропользовании/ А.Н. Петин, П.В. Васильев – Белгород: Изд-во БелГУ, 2011. – 268 с.
3. Фукс А. В. Разработка и исследование алгоритмов интерполяции однозначных поверхностей и их использование при построении цифровых моделей рельефа : дис.... канд. тех. наук : 05.13.18 / Фукс Александр Львович – Томский гос. ун-т, 2001. – 173 с.

## **ЗНАХОДЖЕННЯ ДОДАТКОВИХ ТОЧОК ДЛЯ ТРИКУТНИКІВ ТРИАНГУЛЯЦІЇ ПРИ ПОБУДОВІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ПОВЕРХНІ**

Спірінцев Д.В., Найдиш А.В., Караєв О.Г.

*В роботі розглядається питання знаходження додаткових точок для трикутників триангуляції, що використовуються в подальшому для отримання інтерполяційної поверхні.*

*Ключові слова: триангуляція, трикутний елемент, додаткові точки, інтерполююча поверхню.*

## **SITUATION OF ADDITIONAL POINTS FOR TRIANGLES OF TRIANGULATION AT THE CONSTRUCTION OF THE INTERPOLING SURFACE**

Spiritsev D., Naidysh A., Karaev A.

*The paper considers the question of finding additional points for the triangulation triangles, which are used later to obtain an interpolation surface.*

*Key words: triangulation, triangular element, additional points, interpolating surface.*