УДК 514.18

# ВИЗНАЧЕННЯ РОТОРА В ТОЧКАХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОГО НЕВПОРЯДКОВАНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Черняк В.І., к.т.н.
*Кременецький лісотехнічний коледж (м. Кременець, Україна)*

***В роботі розглядається спосіб визначення ротора в точках дискретного векторного поля, заданого на невпорядкованій множині точок в просторах довільної вимірності.***

***Ключові слова: ротор, дискретне векторне поле, тріангуляція.***

***Постановка проблеми.*** Ротором (вихором) векторного поля ***a*** називається вектор [1]:

$$rot\,a = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)k. \quad (1)$$

Для легшого запам'ятовування формулу (1) записують у символьній (операторній) формі:

$$rot\,a = [\nabla, a] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Формули (1, 2) тільки в тривимірному просторі дозволяють визначити ротор векторного поля, заданого аналітично.

***Аналіз останніх досліджень і публікацій.*** Якщо векторне поле задане на прямокутній сітці в тривимірному просторі, то засоби MATLAB визначають ротор векторного поля за формулою:

$$rota = i\left(\frac{a4_z - a3_z}{dy} - \frac{a6_y - a5_y}{dz}\right) + j\left(\frac{a6_x - a5_x}{dz} - \frac{a2_z - a1_z}{dx}\right) + k\left(\frac{a2_y - a1_y}{dx} - \frac{a4_x - a3_x}{dy}\right), \quad (3)$$

де ***a*1, *a*2… *a*6** – значення векторного поля ***a*** у відповідних вузлах сітки.

Тестування показало адекватність цього методу тільки при задані векторного поля на рівномірній регулярній сітці.

***Формулювання цілей статті.*** Метою статті є розробка способу визначення ротора дискретного векторного поля, заданого на невпорядкованій множин точок, в просторі довільної вимірності.

***Основна частина.*** Розглянемо довільний трикутник в векторному полі ***a*** (рис. 1).

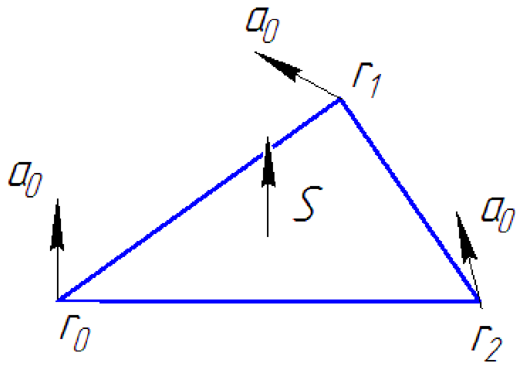


Рис. 1. Трикутник у векторному полі

За теоремою Стокса [1] *циркуляція вектора **a** по замкнутій кривій L дорівнює потоку ротора через поверхню S, яка лежить в векторному полі і має своєю межею лінію L.* В нашому випадку поверхнею є трикутник з площею *S* і межею *L* у вигляді трьох сторін трикутника. Отже, циркуляція вектора ***a*** по замкнутій кривій *L* буде рівною сумі циркуляцій вектора ***a*** по трьох сторонах трикутника. Умовно приймемо, що вектор ***a*** змінюється по відрізку рівномірно, тоді циркуляція $C_{01}$ вектора ***a*** по стороні трикутника ($\mathbf{r_0}$, $\mathbf{r_1}$) визначається як скалярний добуток вектора сторони трикутника ($r_1$-$r_0$) і середнього арифметичного вектора ***a.***

$$C_{01} = ra = (r_1 - r_0)\frac{a_1 + a_0}{2}. \tag{4}$$

Обійшовши почергово всі сторони трикутника, знайдемо циркуляцію *C* вектора ***a*** по трикутнику $r_0r_1r_2$.

Потік вектора а через поверхню *S* у векторній формі визначається інтегралом [1]:

$$Q = \iint\limits_S a \cdot d\sigma, \tag{5}$$

де $d\boldsymbol{\sigma}$ – вектор, направлений по нормалі до поверхні в кожній точці і чисельно рівний площі поверхні *S*.

В нашому випадку, якщо поверхнею є трикутник, вектор $d\boldsymbol{\sigma}$ визначається як половина векторного добутку сторін трикутника

$$d\sigma = (r_1 - r_0) \times (r_2 - r_0)/2. \tag{6}$$

Отже, для розміщеного у векторному полі трикутника формула Стокса прийме вигляд

$$Q = rot\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = C_{01} + C_{12} + C_{20}.$$

Визначення ротора векторного поля полягає в розв'язку системи алгебраїчних рівнянь: скалярний добуток ротора поля на вектор площі трикутника дорівнює циркуляції вектора поля по даному трикутнику. Кількість рівнянь системи дорівнює кількості трикутників, інцидентних даній точці поля.

Алгоритм визначення ротора дискретного невпорядкованого векторного поля в тривимірному просторі буде складатися з таких дій.

1. Будуємо тріангуляцію Делоне для даної множини точок за допомогою оператора **delaunay3** [2]. Упорядковану точкову множину розглядаємо з позицій теорії графів як планарний геометричний граф, який складається з вершин, ребер і трикутників.

2. Для кожної вершини $r_0$ визначаємо множину трикутників, до яких вона належить.

3. Для кожного трикутника множини визначаємо циркуляцію поля за формулою (4) і вектор площі за формулою (6).

4. Складаємо систему рівнянь $rot\, \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma_i} = \boldsymbol{C_i}$ .

5. Визначаємо з системи ротор $rot\, \boldsymbol{a}$.

Для тестування даного алгоритму було взято приклад з [1]. Векторне поле задано рівнянням $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$, де $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ – постійні вектори. Нехай $\boldsymbol{b}$ =(1, 2, 4) і $\boldsymbol{c}$ =(2, -4, 1). Тоді ротор цього поля $rot\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ = =(18, 7, -8).

Задамо прямокутну сітку $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{x}$=[-5:1:5], $\boldsymbol{y}$=[1:1:5], $\boldsymbol{z}$=[1 2]. Визначимо значення поля $\boldsymbol{a}$ в вузлах сітки. Обчислений для цього поля ротор засобами MATLAB і розробленим способом збігається з ротором, знайденим аналітично.

Задамо випадкове відхилення вузлів прямокутної сітки ***r1= r + +rand/3***, де ***rand*** – випадкове значення від -1 до 1 [2]. Визначимо значення поля ***a1*** в вузлах іншої сітки ***r1***. Обчислений розробленим способом для цього поля ротор збігається з ротором, визначеним аналітично, а ротор, обчислений засобами MATLAB, мав відхилення.

В чотирьохвимірному просторі скалярний добуток векторів визначається за формулою [3]

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4. \qquad (7)$$

Векторний добуток двох векторів довільної вимірності являється антисиметричним тензором, рівним подвоєній антисиметричної частини діади. Для тривимірного простору цей тензор [3]

$$\hat{D}_A = \begin{Vmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 \longrightarrow a_3b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 & a_3b_2 - a_2b_3 & 0 \end{Vmatrix} \tag{8}$$

має три компоненти і йому можна співвіднести вектор [3]:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{9}$$

У чотирьохвимірному просторі добутком двох векторів є антисиметричний тензор з шістьма компонентами [3]:

$$\hat{D}_A = \begin{Vmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_1b_4 - a_4b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 & a_2b_4 - a_4b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 & a_3b_2 - a_2b_3 & 0 & a_3b_4 - a_4b_3 \\ a_4b_1 - a_1b_4 & a_4b_2 - a_2b_4 & a_4b_3 - a_3b_4 & 0 \end{Vmatrix} \tag{10}$$

якому ніякий вектор співвіднести не можна.

Чотирьохвимірний ротор є подвоєна антисиметрична частина тензорного добутку $\nabla$ і $\vec{a}$ (діади) [3]:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = 2\{\nabla \cdot \vec{a}\}_A =$$

$$= 2\begin{Vmatrix} 0 & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_4} - \frac{\partial a_4}{\partial x_1}\right) \\ \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4} - \frac{\partial a_4}{\partial x_2}\right) \\ \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\right) & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) & 0 & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_4} - \frac{\partial a_4}{\partial x_3}\right) \\ \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_4}\right) & \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right) & \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_4}\right) & 0 \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Алгоритм визначення ротора дискретного невпорядкованого векторного поля в чотиривимірному просторі буде складатися з таких дій.

1. Будуємо тріангуляцію Делоне для даної множини точок за допомогою оператора **delaunayn** [2]. Упорядковану точкову множину розглядаємо з позицій теорії графів як планарний геометричний граф, який складається з вершин, ребер і трикутників.

2. Для кожної вершини $r_0$ визначаємо множину трикутників, до яких вона належить.

3. Для кожного $k$-го трикутника множини визначаємо циркуляцію поля за формулою (7) і шість компонент $S^k_{ij}$ векторного добутку двох сторін трикутника за формулою:

$$S^k_{ij}=(a_i b_j - a_j b_i)/2. \quad (12)$$

Ділимо на два тому що модуль векторного добутку є площа паралелограма, а нам необхідно знайти площу трикутника.

4. Складаємо систему рівнянь:

$$rota_{ij} \cdot S^k_{ij} = 2C_k \quad (13)$$

або

$$\begin{cases} rota_{12}S^1_{12} + rota_{13}S^1_{13} + rota_{14}S^1_{14} + rota_{23}S^1_{23} + rota_{24}S^1_{24} + rota_{34}S^1_{34} = 2C_1 \\ rota_{12}S^2_{12} + rota_{13}S^2_{13} + rota_{14}S^2_{14} + rota_{23}S^2_{23} + rota_{24}S^2_{24} + rota_{34}S^2_{34} = 2C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ rota_{12}S^k_{12} + rota_{13}S^k_{13} + rota_{14}S^k_{14} + rota_{23}S^k_{23} + rota_{24}S^k_{24} + rota_{34}S^k_{34} = 2C_k \end{cases}.$$

Коефіцієнт ***2*** в правій частині рівнянь вводиться тому, що ротор є подвоєна антисиметрична частина тензорного добутку.

5. Визначаємо з системи шість компонент ротора rot **a.**

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} 0 & rota_{12} & rota_{13} & rota_{14} \\ -rota_{12} & 0 & rota_{23} & rota_{24} \\ -rota_{13} & -rota_{23} & 0 & rota_{34} \\ -rota_{14} & -rota_{24} & -rota_{34} & 0 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Тестові приклади довели адекватність даної моделі.

**В багатовимірному просторі** компоненти тензора ротора визначаються за формулою (за умови, що вимірність простору збігається з вимірністю векторного поля ***F***) [4]

$$(\mathrm{rot}\ \mathbf{F})_{mn} = \partial_m F_n - \partial_n F_m \equiv \frac{\partial F_n}{\partial x_m} - \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \quad (15)$$

за індексів ***m*** і ***n*** , які змінюються від 1 до вимірності простору.

Алгоритм визначення ротора для багатовимірного простору такий самий, як і для чотиривимірного простору, змінюється тільки кількість компонент тензора ротора $rota_{ij}$.

***Висновки.*** Запропоновано спосіб визначення ротора дискретно представленого невпорядкованого векторного поля в просторах довільної вимірності. Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку алгоритмів визначення параметрів та характеристик дискретних невпорядкованих векторних полів.

***Література***

1. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля / И.А. Гольдфайн. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 132 с.
2. Потемкин В.Г. Вычисления в среде MATLAB / В.Г. Потемкин. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2004. – 720 с.
3. Несис Е. И. Методы математической физики / Е.И. Несис. – М.: Просвещение, 1977. – 199 с.
4. Матеріал Вікіпедії. Ротор [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Ротор.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РОТОРА В ТОЧКАХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННОГО НЕУПОРЯДОЧЕННОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Черняк В.И.

***В работе рассматривается способ определения ротора дискретного векторного поля, заданного на неупорядоченном множестве точек в пространствах произвольной размерности.***

***Ключевые слова: ротор, дискретное векторное поле, триангуляция.***

## DEFINITION OF CURL PRESENTED IN POINTS OF DISCRETELY DISORDERED VECTOR FIELDS

Chernyak V.

***In this paper considers a method definition curl of discrete vector field, defined on the set of unordered points in spaces of arbitrary dimension.***

***Keywords: curl, discrete vector field, triangulation.***