

УДК 514.182

## **АНАЛІЗ ПОВЕРХОНЬ ВІДБИТИХ ПРОМЕНІВ ДЛЯ ВІДБИВАЮЧИХ ПОВЕРХОНЬ РІЗНОЇ СКЛАДНОСТІ**

Козак Ю. В.

*Київський національний університет будівництва і архітектури (Україна)*

*В роботі розглядається побудова поверхонь відбитих променів від твірних відбиваючих поверхонь різної складності. Систематизовані відбиваючі поверхні однієї групи дають однакові поверхні відбитих променів, що дозволяє досягати взаємозамінності відбиваючих поверхонь. З отриманих властивостей витікає варіативність задач відбиття, універсалізація залів, використання трансформованих екранів та вирішення зворотної задачі отримання відбиваючих поверхонь по наперед заданим умовам.*

*Ключові слова: акустика, поверхні відбитих променів, поверхня нормалей, відбиваюча поверхня.*

**Постановка проблеми.** Сучасна архітектура в пошуках нових творчих рішень використовує скульптурні форми зовнішніх та внутрішніх поверхонь, в тому числі інтер'єрів видовищних залів. В таких випадках перед архітектурною акустикою постає питання побудови відбиттів від поверхонь складних форм. В разі використання в якості відбиваючих екранів аналітичних поверхонь, питання акустичного комфорту залів вирішується завдяки дослідженням поверхонь відбитих променів.

Конгруенція нормалей поверхонь відбиття розшаровується на поверхні нормалей вздовж перерізів відбиваючих поверхонь площиною. Для вирішення задач відбиття доцільно систематизувати відбиваючі поверхні по виду поверхонь нормалей до їх твірних або ліній перерізу. При побудові відбиттів від цих твірних для груп поверхонь з однаковими поверхнями нормалей отримаємо однакові поверхні відбитих променів. Для вирішення специфічних архітектурних та акустичних задач можна підбирати відбиваючі поверхні зі спільними твірним за умови спільних поверхонь нормалей до цих твірних.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В публікації [1] наведені способи побудови поверхонь відбитих променів за допомогою поверхонь нормалей до твірних відбиваючих поверхонь. В публікаціях [2,3] розглядаються методи побудови та аналіз властивостей торсових поверхонь, їх класифікація та можливості їх використання в якості відбиваючих екранів.

В статті [4] запропонована систематизація відбиваючих

поверхонь по виду поверхонь нормалей до їх твірних.

В енциклопедії [5] показані дослідження аналітичних поверхонь, їх аналітичний опис та візуалізація.

**Формулювання цілей статті.** Загальне розширення кола відбиваючих поверхонь за рахунок поверхонь 2-го порядку, розгортних поверхонь та більш складних утворень.

**Основна частина.** Сучасні архітектурні форми мають ознаки скульптурності, що видно на таких зразках видовищних залів, як проекти Захи Хадид та інших архітекторів по всьому світу. Для складних форм внутрішніх поверхонь необхідно дослідити відбиття від них для вирішення питання проектування направлення звуку на найбільш віддалених слухачів, дифузного розповсюдження на поверхню слухачів та підбору відбивачів по заданим умовам.

Для вирішення задач відбиття від поверхонь різної складності доцільно систематизувати їх по виду поверхонь нормалей до їх твірних. Можна виділити п'ять груп таких поверхонь. **До першої** відносяться поверхні, в яких конгруенція нормалей розшаровується на плоскі пучки паралельних прямих. Такими є нормалі вздовж прямих, які належать площині та твірних розгортних поверхонь. **До другої** групи відносяться поверхні, вздовж твірних яких утворюються поверхні нормалей у вигляді гіпарів. **Третя група** об'єднує поверхні обертання з круговими конусами в якості поверхонь нормалей вздовж кіл перерізу площиною, перпендикулярною до осі поверхні. **До четвертої** групи відносяться циклічні, трубчаті, різні поверхні та окремі випадки інших поверхонь, у яких поверхня нормалей має вигляд плоского пучка прямих. **П'ята** група складається з поверхонь, для яких нормалі вздовж твірних створюють поверхню четвертого порядку. До таких відбиваючих поверхонь відносяться поверхні 2-го порядку загального виду.

При побудовах відбитого променя для I групи зручно використовувати уявне джерело  $S'(x_{S'}, y_{S'}, z_{S'})$ , для груп II-V точку симетричну джерелу відносно нормалі. Відбитий промінь пройде через  $S'$  та точку  $A(x_a, y_a, z_a)$ :

$$x = x_a + lk, \quad y = y_a + mk, \quad z = z_a + nk, \quad (1)$$

де  $\{l, m, n\} = \{x_{S'} - x_a, y_{S'} - y_a, z_{S'} - z_a\}$  – вектор відбитого променя.

Для побудови поверхні відбитих променів необхідно замінити відбиваючу точку на твірну відбиваючої поверхні. Наприклад, якщо твірною є еліпс, його рівняння:

$$x_a = a \cos u, \quad y_a = b \sin u, \quad z_a = c, \quad (2)$$

де  $a, b$  – полуосі еліпса  $0 \leq u \leq 2\pi$ .

Координати точки  $S'(x_{S'}, y_{S'}, z_{S'})$  знаходяться по алгоритму побудови дотичної площини до відбиваючої поверхні в точці A та знаходження симетричної точки для групи I відносно дотичної

площини, для груп II-V геометричного місця точок симетричних відносно нормалей до твірної поверхні відбиття. Після необхідних підстановок отримуємо координати точки  $S'$  для групи I:

$$\begin{aligned}x_{S'} &= -2 \frac{-B^2 x_s - C^2 x_s + AB y_s + AC z_s}{A^2 + B^2 + C^2} - x_s; \\y_{S'} &= -2 \frac{AB x_s - A^2 y_s - C^2 y_s + BC z_s}{A^2 + B^2 + C^2} - y_s; \\z_{S'} &= -2 \frac{AC x_s + BC y_s - A^2 z_s - B^2 z_s}{A^2 + B^2 + C^2} - z_s;\end{aligned}\quad (3)$$

та для груп II-V:

$$\begin{aligned}x_{S'} &= -2 \frac{-B^2 x_a - C^2 x_a - A^2 x_s}{A^2 + B^2 + C^2} - x_s; \\y_{S'} &= -2 \frac{AB x_a - AB x_s - A^2 y_s - B^2 y_s - C^2 y_s}{A^2 + B^2 + C^2} - y_s; \\z_{S'} &= -2 \frac{AC x_a - AC x_s - A^2 z_s - B^2 z_s - C^2 z_s}{A^2 + B^2 + C^2} - z_s,\end{aligned}\quad (4)$$

де  $\{A, B, C\}$  – нормальний вектор дотичної площини в точці A. Його можна отримати як частинні похідні рівняння відбиваючої поверхні:

$$A = \begin{vmatrix} y'_\beta & z'_\beta \\ y'_\gamma & z'_\gamma \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_\beta & x'_\beta \\ z'_\gamma & x'_\gamma \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_\beta & y'_\beta \\ x'_\gamma & y'_\gamma \end{vmatrix}.\quad (5)$$

Таблиця 1

Характеристики відбиваючих твірних та поверхонь нормалей для п'яти груп відбиваючих поверхонь

№ групи	I	II	III	IV	V
Відбиваюча твірна	пряма	пряма	коло	крива 2го порядку	крива 2го порядку
Поверхня нормалей	пучок паралельних прямих	гіпар	круговий конус	плоский пучок прямих	поверхня 4го порядку

Перша група об'єднує площину, конус, циліндр та торс вздовж прямолінійних твірних. Поверхні нормалей, які мають вигляд пучка паралельних прямих, будуть мати вигляд

$$x = x_a + lk + At, \quad y = y_a + mk + Bt, \quad z = z_a + nk + Ct.\quad (6)$$

Плоский пучок відбитих променів (поверхня відбитих променів), який проходить через уявне джерело, запишеться:

$$\begin{aligned}x &= x_{S'} + t(x_a - x_{S'} - k x_\beta), \\y &= y_{S'} + t(y_a - y_{S'} - k y_\gamma), \quad z = z_{S'} + t(z_a - z_{S'} - k z_\beta),\end{aligned}\quad (7)$$

де  $x_a, y_a, z_a$  – координати довільної точки твірної відбиваючої поверхні,  $x_{S'}, y_{S'}, z_{S'}$  – координати уявного джерела, параметри якого

залежать від трьох коефіцієнтів площини  $A, B, C$ , дотичної до відбиваючої поверхні в точці  $A(x_a, y_a, z_a)$ .

Для торсової поверхні, отриманою методом обкатки, де встановлюється однозначна відповідність між лініями обкатки, поверхня відбитих променів буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} x &= x_{s'} + t(x_a - x_{s'} - k(x_\beta - x_\gamma)); \\ y &= y_{s'} + t(y_a - y_{s'} - k(y_\beta - y_\gamma)); \\ z &= z_{s'} + t(z_a - z_{s'} - k(z_\beta - z_\gamma)), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $x_\beta, y_\beta, z_\beta$  – координати довільної точки лінії обкатки  $\beta$ ,  $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$  – координати відповідної точки лінії обкатки  $\gamma$ .

Для відбиваючих поверхонь II групи поверхня відбитих променів буде мати вигляд (8) з тою різницею, що однозначна відповідність між лініями  $\beta$  та  $\gamma$  буде встановлюватись для кожної поверхні по своєму.

Відбиваючі поверхні V групи в якості відбиваючої лінії мають криві 2-го порядку. Поверхнею нормалей є поверхня 4-го порядку. Тоді данні по цим поверхням можна звести в таблицю:

Таблиця 2

Значення коефіцієнтів, які відповідають поверхням V групи

Назва	Рівняння	A	B	C	$x_a, y_a, z_a$
Конус загального вигляду	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$\frac{x_a}{a^2}$	$\frac{y_a}{b^2}$	$-\frac{z_a}{c^2}$	$x_a = a \cos u,$ $y_a = b \sin u,$ $z_a = c = h$
Еліпсоїд загального вигляду	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x_a}{a^2}$	$\frac{y_a}{b^2}$	$\frac{z_a}{c^2}$	$x_a = a \cos u \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ $y_a = b \sin u \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ $z_a = h < c$
Однопорожнинний гіперболоїд загального вигляду	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x_a}{a^2}$	$\frac{y_a}{b^2}$	$-\frac{z_a}{c^2}$	$x_a = a \cos u \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ $y_a = b \sin u \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ $z_a = h$
Двопорожнинний гіперболоїд загального вигляду	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x_a}{a^2}$	$\frac{y_a}{b^2}$	$-\frac{z_a}{c^2}$	$x_a = a \cos u \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ $y_a = b \sin u \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ $z_a = h > c$

Параболоїд загального вигляду	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	$\frac{x_a}{p}$	$\frac{y_a}{q}$	-1	$x_a = \cos u \sqrt{2hp}$ $y_a = \sin u \sqrt{2hq}$ $z_a = h$
Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$	$\frac{x_a}{p}$	$-\frac{y_a}{q}$	-1	$x_a = \pm ch u \sqrt{2hp}$ $y_a = sh u \sqrt{2hq}$ $z_a = h$

Щодо поверхонь III групи, які є поверхнями обертання, їх коефіцієнти для поверхонь конуса, еліпсоїда, параболоїда, однопорожнинного гіперболоїда, двопорожнинного гіперболоїда будуть відрізнятись від даних таблиці 2 значеннями  $a=b$ ,  $p=q$ , що перетворює поверхні загального виду на поверхні обертання.

Поверхні IV групи є поверхні, у яких нормалі до твірних представляють собою плоскі пучки. В першому випадку такі нормалі створюються в окремих випадках поверхонь другого порядку, в другому вони існують для криволінійних твірних прямих циліндричних поверхонь, поверхонь переносу, різних поверхонь. Аналітично рівняння пучка нормалей можна отримати як проекцію поверхні нормалей на площину  $xOy$  шляхом виключення координати  $z$ . Коефіцієнти  $A, B, C$  для циліндричних поверхонь будуть: еліптичний циліндр  $A = \frac{x_a}{a^2}$ ,  $B = \frac{y_a}{b^2}$ ,  $C=0$ ; гіперболічний циліндр  $A = \frac{x_a}{a^2}$ ,  $B = -\frac{y_a}{b^2}$ ,  $C=0$ ; параболічний циліндр  $A = p$ ,  $B = -y_a$ ,  $C=0$ .

**Висновки.** В статті подані аналітичні описи поверхонь відбитих променів від твірних відбиваючих поверхонь. Подальші розробки можуть бути спрямовані в сторону досліджень інших типів відбиваючих поверхонь, розробки систем трансформації відбивачів.

### *Література*

1. Подгорный А.Л. Поверхности отражённых лучей / А.Л.Подгорный // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 20. –К.: Будівельник, 1975. – С.13 -16.
2. Підгорний О.Л. Можливості використання торсових поверхонь в якості відбивачів сонячних променів / О.Л. Підгорний // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2008. Вип. 80. – С. 11-15.
3. Підгорний О.Л. Можливості використання торсових поверхонь в якості відбивачів сонячних променів (продовження) / О.Л.Підгорний // Науково-технічний збірник «Енергоефективність в будівництві та архітектурі». – Київ.: КНУБА, 2017. – Випуск 9. – С.194-197.

4. Козак Ю.В. Дослідження поверхонь нормалей як засіб систематизації поверхонь відбиття / Ю.В. Козак // Енергоефективність в будівництві та архітектурі. – К.:КНУБА, 2013. – Вип.5. – С.66-69.
5. Кривошапко С.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей / С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 556с.

## АНАЛИЗ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРАЖЕННЫХ ЛУЧЕЙ ДЛЯ ОТРАЖАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗНОЙ СЛОЖНОСТИ

Козак Ю. В.

*В работе рассматривается построение поверхностей отраженных лучей от образующих, полученных пересечением с плоскостью для отражающих поверхностей различной сложности. Отражающие поверхности, систематизированные по принципу поверхностей нормалей к их образующим, дают однотипные поверхности отраженных лучей, что позволяет достигать взаимозаменяемость отражающих поверхностей. Из полученных свойств вытекает возможность вариативности задач отражения, универсализации залов, использование трансформированных экранов и решения обратной задачи получения отражающих поверхностей по заранее заданным условиям.*

*Ключевые слова: акустика, поверхности отраженных лучей, поверхность нормалей, отражающая поверхность.*

## GEOMETRICAL MODELLING OF REFLECTIONS FROM DEVELOPABLE SURFACES

Kozak Y.

*The paper deals with the construction of surfaces of reflected rays from generatrices obtained by intersecting with a plane for reflecting surfaces of various complexity. Reflecting surfaces, systematized according to the principle of surfaces of normals to their generatrices, give identical surfaces of reflected rays, which makes it possible to achieve interchangeability of reflecting surfaces. From the properties obtained it follows the possibility of variability in reflection problems, universalization of halls, the use of transformed screens and the solution of the inverse problem of obtaining reflecting surfaces according to predetermined conditions.*

*Key words: acoustics, surface of reflected rays, surface of normals, reflecting surface.*