

УДК 514.18

ФОРМИРОВАНИЕ ДПК НА УЧАСТКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Гавриленко Е.А., к.т.н.,

Холодняк Ю.В., к.т.н.

Мелитопольская школа прикладной геометрии

Таврический государственный агротехнологический университет

(г. Мелитополь, Украина)

В работе рассматривается задача формирования участков дискретно представленной кривой, которые содержат особые точки. Положение особой точки определяется внутри области возможного решения задачи.

Ключевые слова: дискретно представленная кривая, особая точка, гранная полярная поверхность, область расположения кривой.

Постановка проблемы. Дискретно представленная кривая (ДПК) формируется сгущением исходного точечного ряда произвольной конфигурации по участкам, на которых возможно обеспечить монотонное изменение значений ее характеристик. Монотонные участки стыкуются в особых точках.

При формировании ДПК содержащей минимальное по условиям задачи число особых точек определяется область возможного расположения монотонных участков и участков содержащих особые точки. В процессе последовательных сгущений (увеличения количества узлов, которые представляют кривую) диапазон возможного расположения ДПК уменьшается. Задачу формирования ДПК будем считать решенной, когда размеры области ее возможного расположения не превышают заданного значения.

Наличие локализуемой в результате сгущений области возможного расположения ДПК – необходимое условие формирования точечного ряда принадлежащего кривой с заданными геометрическими свойствами.

Анализ последних исследований и публикаций. Способ формирования ДПК на основе области ее возможного расположения предложен в [2]. ДПК представлена пространственным точечным рядом. Каждые три последовательные точки определяют плоскость, которая названа прилегающей (ПП). Четыре последовательные ПП, проходящие через i -ю и $i+1$ -ю точки ограничивают прилегающий тетраэдр (ПТ). Цепочка последовательных ПТ, определенных на всех

участках, является областью расположения кривой линии постоянного хода, интерполирующей исходный точечный ряд. Назначение точек сгущения в пределах прилегающих тетраэдров гарантирует постоянный ход формируемой ДПК.

Геометрические характеристики пространственной кривой линии могут определяться через параметры ее полярного торса [1]. Полярный торс является огибающей поверхностью нормальных плоскостей кривой линии. Ребро возврата полярного торса – геометрическое место соприкасающихся сфер кривой. Касательные к ребру возврата – оси кривизны, на которых расположены центры соприкасающихся окружностей. Кривая линия (l) рассматривается как траектория движения точки M , принадлежащей нормальной плоскости N , обкатывающей полярный торс (рис. 1).

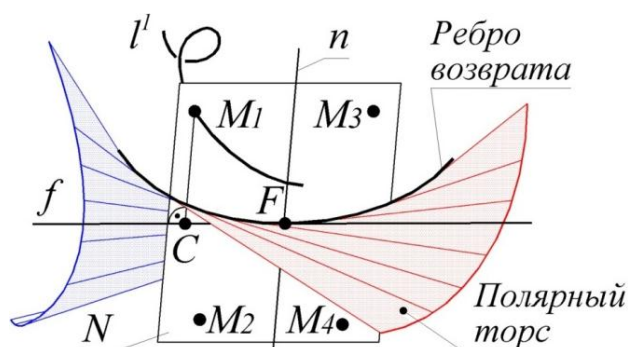


Рис. 1. Формирование пространственной кривой линии

Параметры полярного торса однозначно определяют кривизну, кручение, радиусы соприкасающихся сфер и динамику изменения их значений вдоль кривой.

Способ формирования монотонных ДПК, вдоль которых радиусы кривизны и соприкасающихся сфер монотонно возрастают или убывают предложен в [3]. Кривая формируется на основе дискретного аналога полярного торса – гранной полярной поверхности (ГПП). ГПП образована участками плоскостей (P_i), перпендикулярных хордам, соединяющим последовательные исходные точки, и проходящих через середины хорд (рис. 1).

Прямые пересечения перпендикулярных плоскостей являются аналогами осей кривизны формируемой кривой, а ломанная, образованная этими прямыми, представляет ребро возврата полярного торса.

Положение точек сгущения в плоскостях P_i , определяется вновь сформированными звеньями ломаной возврата, граничные точки которых принадлежат исходным звеньям.

Формулировка целей статьи. Разработать единую методику формирования участков дискретно представленной кривой, содержащих особые точки.

Основная часть. Кривую линию можно рассматривать, как состоящую из участков постоянного хода, вдоль которых радиусы кривизны и соприкасающихся сфер возрастают или убывают. Монотонные участки стыкуются в особых точках.

Особые точки можно разделить на точки стыковки монотонных кривых, определяемых одним полярным торсом и точки стыковки монотонных кривых, определяемых различными полярными торсами.

Зависимость между свойствами полярного торса и наличием особой точки рассмотрим на примере точки смены хода кривой.

Пусть кривая l^i определяется перемещением точки M_1 , принадлежащей четверти нормальной плоскости N , накатывающейся на полярный торс (рис. 1). После перехода точки M_1 через ось кривизны, по которой плоскость N касается полярного торса, она располагается на четверти плоскости N , скатывающейся с полярного торса (на рис. 1 это четверть расположения точек M_2). При этом ход кривой меняется. В остальных случаях точке смены хода соответствует ось кривизны, по которой соприкасаются полярные торсы, определяющие различные монотонные кривые.

Кривая линия располагается по одну сторону от соприкасающейся плоскости в окрестности точки смены хода. Аналогично исходные точки ДПК располагаются по одну сторону прилегающей плоскости (ПП), соответствующей особому участку. На рис. 2 это плоскость $ПП_i$.

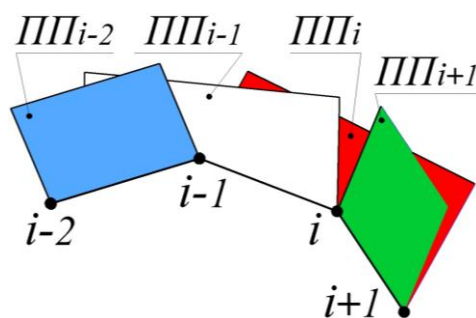


Рис. 2. Расположение ПП на участке смены хода ДПК

Особому участку ДПК соответствует участок стыковки ГПП. Если участком, содержащим точку смены хода назначен участок $i-1 \dots i$ или $i \dots i+1$, то кривая может быть сформирована с единственной особой точкой.

Участок стыковки определяется плоскостями P_i и P_{i+1} , которые пересекаются по прямой, проходящей через центр сферы (T_i), определяемой точками $i-1$, i , $i+1$, $i+2$, и центр окружности (C_i) (C_i),

определяемой точками $i-1, i, i+1$ (рис. 3).

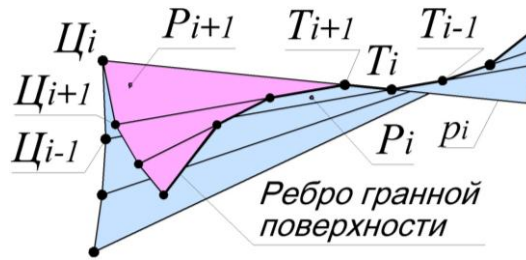


Рис. 3. ГПП, определяющие участок смены хода ДПК

Область возможного расположения точки сгущения на участке $i...i+1$ ограничена прямыми пересечения плоскости P_i и прилегающих плоскостей: $ПП_{i-1}, ПП_i, ПП_{i+1}, ПП_{i+2}$.

На особом участке область возможного расположения точки сгущения разделена на два треугольника: K_iBD и K_iAC , где K_i – середина хорды $[i...i+1]$ (рис. 4,а). На рис. 4,б, для сравнения, показана область возможного расположения точки кривой постоянного хода – четырехугольник K_iCED .

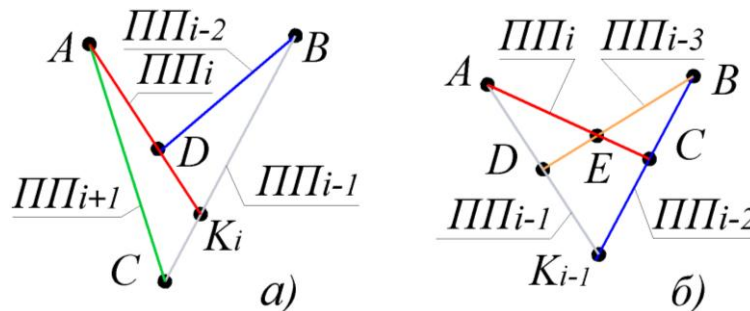


Рис. 4. Область расположения точки сгущения ДПК

В случае назначения точки сгущения в пределах треугольника K_iBD особый участок локализуется и будет ограничен точками i_{ce} и $i+2$. После назначения i_{ce} ДПК будет формироваться на монотонных участках $...i+1$ и $i_{ce}...$. В процессе последовательных сгущений область расположения особого участка локализуется вырождаясь в точку. Число граней ГПП увеличивается и становится сколь угодно большим. В пределе получим полярный торс, определяющий кривую содержащую точку смены хода.

Выводы. В работе предложен способ формирования ДПК на участках, содержащих особые точки. Способ предусматривает проведение анализа исходного точечного ряда. В результате определяются участки, на которых происходит стыковка монотонных кривых и область возможного расположения этих участков. При формировании ДПК точки сгущения назначаются внутри области их возможного расположения. Геометрические свойства формируемой

ДПК и область ее возможного расположения контролируются характеристиками дискретного аналога полярного торса пространственной кривой линии – гранной полярной поверхности.

Література

1. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия / М.Я. Выгодский. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.
2. Гавриленко Е.А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование одномерных обводов с заданными дифференциально геометрическими свойствами / Е.А. Гавриленко // Вісник Херсонського національного технічного університету / ХНТУ. – Херсон, 2015. – Вип. 3 (54). – С. 555-559.
3. Гавриленко Е.А. Формирование геометрических характеристик монотонной кривой линии / Е.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк, В.А. Пахаренко // Вісник Херсонського національного технічного університету / ХНТУ. – Херсон, 2016. – Вип. 3 (58). – С. 492-496.

ФОРМУВАННЯ ДПК НА ДІЛЯНКАХ, ЩО МІСТЯТЬ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ

Гавриленко Є.А., Холодняк Ю.В.

У роботі розглядається задача визначення та класифікація ділянок дискретно представленої кривої, які містять особливі точки. Положення особливої точки визначаються всередині області можливого розв'язку задачі.

Ключові слова: дискретно представлена крива, особлива точка, області розташування кривої, гранна полярна поверхня.

FORMATION OF DPC ON PLOTS THAT CONTAIN SINGULAR POINTS

Gavrilenko Eu., Kholodnyak Yu.

The problem of determining and classifying segments of a discrete presented curve that contain singular points is considered in this work. The position of the singular point are determined within the area of possible solution of the problem.

Key words: discretely presented curve (DPC), a singular point, a region of the curve, a polished polar surface.