

УДК 514.18 : 721

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ТЕНТОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

Демчишин А.А., к.т.н.,

Аушева Н.М., д.т.н.

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Україна)*

*Автори роботи презентують метод формоутворення мембрани тентової конструкції за допомогою поверхні, побудованої на основі ізотропної кривої Безьє в інтерактивному режимі. На прикладі показано, що площа такої поверхні є локально мінімальною. Практична цінність методу полягає в можливості безпосереднього дизайну поверхні тенту, на відміну від інших відомих методів, які виходять з жорстких крайових умов.*

*Ключові слова: тентова конструкція, ізотропна крива Безьє, мінімальна поверхня.*

**Постановка проблеми.** Будівництво тентових конструкцій - відносно новий, але вже добре себе зарекомендувавший [1,2], метод швидкого зведення будівельних споруд різного цільового призначення: павільйонів, критих ринків, спортивних споруд, естрад, літніх кафе, навісів, банерів. Для будівництва тентових споруд не потрібно проводити а ні підготовку фундаменту, ні узгодження з містобудівними органами, що робить їх об'єктами, придатними для проведення тимчасових заходів, наприклад, презентацій або виставок.

Тентові (мембранні) конструкції являють собою споруди, що складаються з двох основних складових: металевого каркасу і покриття з тканини або плівки (рис.1). Металокаркасні тентові споруди відкривають необмежені конструктивні можливості формоутворення унікальних екстер'єрів.

Мембрана тентової конструкції перебуває під дією напруження розтягу, і не несе на собі ані напруження компресії, ні вигину. Фактором стабільності таких поверхонь є їх антикластична викривленість, що дає можливість мембрані не втрачати своєї форми.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Аналіз відомих джерел, що описують тентові конструкції показує, насамперед, розподілення робіт на ті, що висвітлюють аспекти застосування конструктивних елементів тентових конструкцій (троси, щогли і т. ін.) з прикладами з загальносвітової практики [1-3], та на ті, що досліджують методи моделювання тентових конструкцій [4-10].



Рис.1. Тентова конструкція літнього кафе для працівників заводу компанії Ivoclar в місті Schaan, Liechtenstein

Об'єднуючим фактором для робіт з моделювання поверхонь тентових конструкції виступає неможливість аналітичного опису мінімальної поверхні. Така обставина призводить до формулювання задачі пошуку дизайну мембрани через наперед задану замкнену границю (або інші граничні умови) тентової конструкції. Вирішення задачі пошуку поверхні мембрани в зазначених джерелах проводиться за допомогою переходу до представлення поверхні дискретними елементами, позиція яких оптимізується. З програмних пакетів виділяється пакет Grasshopper для комплексу моделювання Rhino.

Існуючі дослідження моделювання мінімальних поверхонь в аналітичному вигляді у проаналізованих джерелах [10-13] ніяким чином не корелюють з тематикою тентових конструкцій. Зазвичай, досліджуються класичні мінімальні поверхні (катеноїд, поверхня Енепера) [13], або мінімальні поверхні формуються виходячи з умови рівняння Пуассона  $H = \lambda(p_1 - p_2)$ , з якого витікає рівність нулю середньої кривини  $H$  для умови рівності тисків з обох боків поверхні розділу середовищ.

**Формулювання цілей статті.** Метою дослідження є розробка теоретичних і практичних засад геометричного моделювання поверхонь тентових конструкцій в аналітичному вигляді без наперед заданої замкненої границі.

**Основна частина.** Для досягнення цілей статі будемо рухатись в наступній послідовності кроків дослідження:

1. Побудова поверхні тентової конструкції;
2. Перевірка мінімальності площі поверхні в локальному сенсі.

*Крок 1. Побудова поверхні тентової конструкції.*

В рамках даної роботи не будемо ставити за мету моделювання деякого спеціального дизайну поверхні тентової конструкції, насамперед задамося досягненням вимоги мінімальності площі поверхні, аналітичності її опису, створенням інтуїтивно зрозумілого інструментарію користувача впливу на її формоутворення.

В продовження досліджень, що було розпочато в роботі [14], розглянемо наступне рівняння кубічної поверхні:

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3, \quad (1)$$

$$t = u + vi, \quad u, v \in [0, 1];$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= (a_0^x + b_0^x i; & a_0^y + b_0^y i; & a_0^z + b_0^z i), \\ \mathbf{P}_1 &= (a_1^x + (b_0^x + a_1^y - a_0^y) i; & a_1^y + (b_0^y - a_1^x + a_0^x) i; & a_0^z + b_0^z i), \\ \mathbf{P}_2 &= (a_2^x + (b_1^x + a_2^y - a_1^y) i; & a_2^y + (b_1^y - a_2^x + a_1^x) i; & a_2^z + b_2^z i), \\ \mathbf{P}_3 &= ((-(z_2 - z_1)^2 - (y_2 - y_1)^2)/(x_1 - x_0) + x_2; \\ & (-2(z_2 - z_1)^2 - (x_1 - x_0)(x_3 - x_2))/(y_1 - y_0) + y_2; \\ & 2((y_2 - y_1)(z_2 - z_1))/(y_1 - y_0) + z_2), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $x_0, y_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3$  - комплексні компоненти радіус векторів  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$  відповідно. Для зручності досліджень змінні, що доступні користувачеві для управління поверхнею, позначено в правих частинах рівнянь (2) жирним шрифтом.

Аналітичний опис поверхні (1), побудованої на основі ізотропної кривої Безье 3-го порядку, дозволяє конструктору здійснювати інтуїтивно зрозуміле управління над її формоутворенням за допомогою контрольних точок сплайну, через який проходить поверхня (рис.2). Сплайн контролюється трьома опорними точками  $\mathbf{P}_0^{\text{Re}} = (a_0^x, a_1^x, a_2^x)$ ,  $\mathbf{P}_1^{\text{Re}} = (a_0^y, a_1^y, a_2^y)$ ,  $\mathbf{P}_2^{\text{Re}} = (a_0^z, a_0^z, a_2^z)$  та двома параметрами  $b_0^z, b_2^z$ , що додатково впливають на координати четвертої опорної точки.

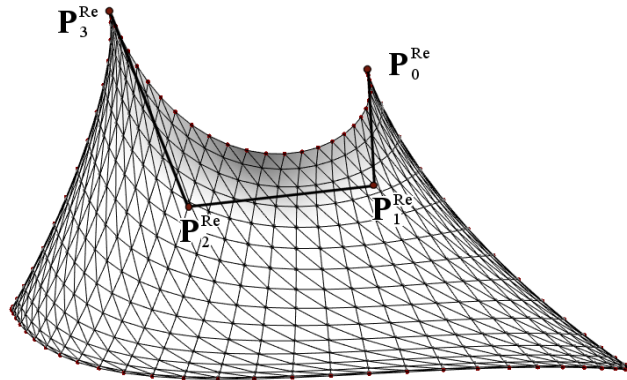


Рис. 2. Приклад поверхні  $\text{Re}(\mathbf{B}(u + vi))$

Емпіричні дослідження рівняння (1) показують, що хоча змінні  $b_0^x, b_2^y$  присутні в кожній з дійсних частин членів полінома, їх зміна жодним чином не впливає на дійсну частину результуючої поверхні.

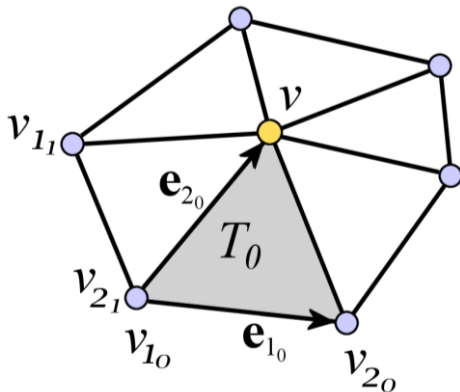
*Крок 2. Перевірка мінімальності площі поверхні в локальному сенсі.*

Для контролю способу переходу від аналітичної форми поверхні до моделі, що її апроксимує сіткою трикутників, перевіримо мінімальність площі моделі з прикладу. Не будемо ставити за мету вирішення задачі Плато [15,16] з пошуку глобально мінімальної поверхні, що проходить через наперед задану границю, натомість обмежимося встановленням значення локального мінімуму даної стабільної мінімальної поверхні.

Нехай  $\mathbf{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$  множина вершин поверхні,  $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{V}$  - множина вершин границі поверхні потужності  $l$ ,  $\mathbf{T}$  - множина трикутників. Для кожної вершини з множини  $\mathbf{G}$  розрахуємо її нове положення виходячи з функціоналу, що мінімізує площу:

$$A(\mathbf{T}_{kNB}) = \sum_{j=0}^n A(T_j) = \sum_j |\mathbf{e}_{1j} \times \mathbf{e}_{2j}| \rightarrow \min, \quad (3)$$

де  $\mathbf{T}_{kNB}$  - множина трикутників, що мають спільну вершину  $v_k, k \in \{0, l\}$ , потужності  $n$ .



$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (x; y; z); \\ \mathbf{e}_{1j} &= (\mathbf{v}_{2j} - \mathbf{v}_{1j}) = \\ &= (x_{21j}, y_{21j}, z_{21j}); \\ \mathbf{e}_{2j} &= (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{1j}) = \\ &= (x - x_{1j}, y - y_{1j}, z - z_{1j}). \end{aligned}$$

Рис. 3. Схема розрахунку оптимального положення вершини  $v$

Положення вершини  $v(x, y, z)$  однозначно визначено функцією  $A(\mathbf{T}_{kNB})$ , за умови, що вершини околу вершини  $v_k$  не лежать всі одночасно на площині (рис.3). Для визначення екстремуму функції вирішимо задачу одночасної рівності нулю її перших частинних похідних (4).

Достатньою умовою існування екстремуму функції (3) у критичній точці  $v(x; y; z)$  є позитивна визначеність матриці Гессе, складеної з других похідних функції. Аналітичну перевірку достатньої умови екстремуму лишимо за межами даної роботи.

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^n (z_{21_j}^2 + y_{21_j}^2) \mathbf{x} - x_{21_j} y_{21_j} \mathbf{y} - z_{21_j} x_{21_j} \mathbf{z} = \\ \sum_j (-z_{21_j} x_{21_j} z_{1_j} + z_{21_j}^2 x_{1_j} - y_{21_j} x_{21_j} y_{1_j} + y_{21_j}^2 x_{1_j}); \\ \sum_{j=0}^n (-x_{21_j} y_{21_j} \mathbf{x} + (z_{21_j}^2 + x_{21_j}^2) \mathbf{y} - z_{21_j} y_{21_j} \mathbf{z}) = \\ \sum_j (-z_{21_j} y_{21_j} z_{1_j} + z_{21_j}^2 y_{1_j} - y_{21_j} x_{21_j} x_{1_j} + x_{21_j}^2 y_{1_j}); \\ \sum_{j=0}^n (-x_{21_j} z_{21_j} \mathbf{x} - z_{21_j} y_{21_j} \mathbf{y} + (y_{21_j}^2 + x_{21_j}^2) \mathbf{z}) = \\ \sum_j (-z_{21_j} y_{21_j} y_{1_j} + y_{21_j}^2 z_{1_j} - y_{21_j} z_{21_j} x_{1_j} + x_{21_j}^2 z_{1_j}). \end{cases} \quad (4)$$

Проведення процесу локальної ітеративної мінімізації площі поверхні тентової конструкції з прикладу призводить до зміни позицій вершин сітки трикутників (рис.4), в той же самий час, загальна площа поверхні зменшується неістотно (менше 1%), з чого можна зробити наступні висновки:

1. Дана геометрична модель поверхні тентової конструкції має мінімальну площу (в локальному сенсі);
2. Існує сітка з трикутників, яка точніше апроксимує мінімальну поверхню, ніж та, прообразом якої є вершини квадратної сітки координатних ліній  $0 \leq u, v \leq 1$ .

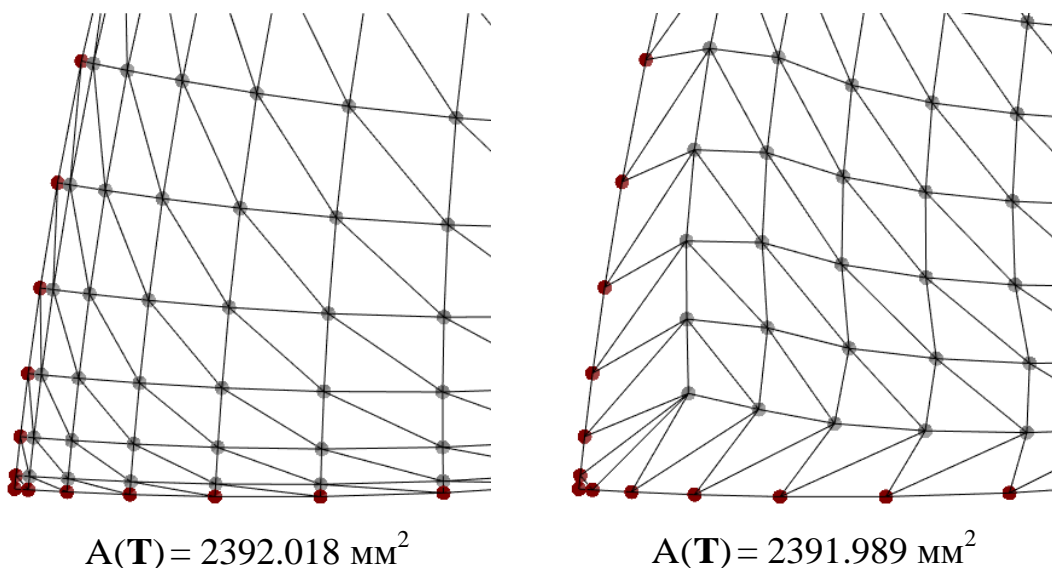


Рис. 4. Порівняння сітки трикутників кута ділянки поверхні до оптимізації площі (зліва) та після (справа)

**Висновки.** В роботі показано, що спосіб моделювання мембрани тентової конструкції на основі ізотропної кривої Безье дає можливість проводити дизайн безпосередньо самої поверхні за допомогою інтуїтивно зрозумілого інструментарію у вигляді трьох контрольних точок сплайну, через який проходить поверхня, та двох додаткових параметрів. Показано, що поверхні отримані в такий спосіб мають мінімальну площу в локальному сенсі.

### *Література*

1. Seidel M. Tensile surface structures: a practical guide to cable and membrane constr. [Text]/ M. Seidel. – Berlin: Ernst & Sohn, 2009. – 229 p.
2. Fabric Architecture [Text]. – IFAI, 2007 – N. 4, V. 19. – 64 p.
3. Schlaich J. Tensile Membrane Structures [Text]/ J. Schlaich, B. Bergemann, W. Sobek // Lecture in the IASS-Congress Madrid. – Madrid, 1989. – P.19-32.
4. Lewis W.J. Tension Structures: Form and Behaviour [Text]/ W.J. Lewis // Thomas Telford Publishing. – London, 2003. – 201 p.
5. Barnes M. R. Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation [Text]/ M. R. Barnes// International Journal of Space Structures, – 1999. – № 14 (2). – P. 89-104.
6. Шалимов В. Н. Геометрическое моделирование тентовых тканевых конструкций: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. техн. наук: 05.01.01 / В. Н. Шалимов. – Н.Новгород: Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т, 2012. – 20 с.
7. Bhooshan S. Applying dynamic relaxation techniques to form-find and manufacture curve-crease folded panels [Text]/ S. Bhooshan, V. Bhooshan, M. ElSayed, S. Chandra, P. Richens, P. Shepherd // Simulation. SAGE Publications. – 2015. – I. 9, V. 91. – P. 773-786.
8. Yu H. Robust construction of minimal surface from general initial mesh [Text]/ Yu H., Wu Q., Chen M., Muhammad S. //Applied Math.- A Journal of Chinese Universities. – 2015. – №30. – P. 227-244.
9. Попов Е. В. Метод натянутых сеток в задачах геометрического моделирования [Текст] : дис. ... д-ра техн. наук : 05.01.01 / Е. В. Попов. – Н. Новгород, 2001. – 248 с. : ил.
10. Meeks III W. H. A Survey on Classical Minimal Surface Theory [Text]/ W. H. Meeks III, J. Pérez // University Lecture Series. – 2012. – V.60. – 182 p.
11. Calegari D. Notes on minimal surfaces [Text]/ D. Calegari. – University of Chicago, 2014. – 38 p.
12. Ordulu H.N. When is a minimal surface not area-minimizing? [Text]/ H.N. Ordulu // Seminar in Geometry 2004. – Massachusetts Institute of Technology, 2004. – 11 p.
13. Kahyaoglu S. An approach for minimal surface family passing a curve

- [Text] /S. Kahyaoglu, E. Kasap //International Journal of Contemporary Mathematical Sciences. – 2015.–N. 5, V. 10.– P. 223-232.
14. Аушева Н. М. Згинання мінімальних поверхонь в комплексному просторі деформацією напрямної кривої Без'є [Текст]/ Н.М. Аушева, А. А. Демчишин // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”. – Вип.90. – К.:КНУБА, 2012. – С.15-19.
15. Gray J. The work of Jesse Douglas on Minimal Surfaces [Text]/ J. Gray // B. of the American Math. Society. – 2008. –№ 45(2). – P. 293–302.
16. Douglas J. Solution of the Problem of Plateau [Text]/ J. Douglas // Transactions of the American Math. Society. –1931.– №32.1. – P. 263-321.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕНТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Демчишин А.А., Аушева Н.М.

*Авторы работы презентуют метод формообразования мембраны тентовой конструкции с помощью поверхности, построенной на основе изотропной кривой Безье в интерактивном режиме. На примере показано, что площадь такой поверхности является локально минимальной. Практическая ценность метода заключается в возможности непосредственного дизайна поверхности тента, в отличие от других известных методов, которые исходят из жестких граничных условий.*

*Ключевые слова: тентовая конструкция, изотропная кривая Безье, минимальная поверхность.*

## GEOMETRIC MODELING OF SURFACES OF TENSILE FABRIC STRUCTURES

Demchyshyn A., Ausheva N.

*The authors present the method of form creation of a membrane for tensile fabric structure. The membrane is modeled using the surface based on isotropic Bezier curve in interactive mode. The study of the example shows that the area of such surface is locally minimal. The practical value of the method lies in capability of immediate design of the fabric membrane, unlike other known methods which originate from strict boundary conditions.*

*Keywords: tensile fabric structure, isotropic Bezier curve, minimal surface.*