

УДК 621.372.061

## АЛГОРИТМ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА МАТРИЦ В МЕТОДЕ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Залевская О.В., к.т.н.,  
Литвиненко П.Л.,  
Финогенов А.Д., к.т.н.,  
Янушевська О.І.

*Національний технічний університет України «Київський  
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Україна)*

*В работе предложен алгоритм полного перебора обратно-симметричных матриц с учетом подобия относительно главной побочной диагонали.*

*Ключевые слова: метод анализа иерархий (МАИ), парные сравнения, многокритериальное принятие решений, алгоритм полного перебора.*

**Постановка проблемы.** Индекс случайной согласованности (СИ) в методе анализа иерархий (МАИ) [1] используется для вычисления оценки согласованности (ОС) мнения эксперта, собственного вектора, соответствующего максимальному собственному числу и т.д. Расчет СИ для матриц малой размерности основан на вычислении математического ожидания значения  $\lambda_{\max}$  для обратно-симметричных матриц, заполненных значениями в выбранной шкале, из которых чаще всего используется (1):

$$\Omega_9 = \{1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \quad (1)$$

При расчете всех возможных вариантов матриц [1] для проведения различных экспериментов, связанных со значениями  $\lambda_{\max}$ , основной проблемой является время расчета [2].

**Анализ последних исследований и публикаций.** При разработке МАИ Т. Саати определил значения СИ на основании выборки из 50 матриц для каждой из размерностей [1]. В дальнейшем эти данные были уточнены как в его работах [3], так и в работах ряда других исследователей [2-6]. В [2] предлагался подход основанный на расчете всех возможных вариантов матриц и были приведены значения СИ для матриц  $N=3$  и  $N=4$ , которые несколько отличались от значений, полученных другими авторами. Уменьшение времени вычисления  $\lambda_{\max}$ , позволит повысить эффективность анализа не только этапа оценки согласованности мнения эксперта, но и других этапов МАИ.

**Формулировка целей статьи.** В статье предлагается алгоритм формирования полного набора матриц определенной размерности с заполнением данными из выбранной шкалы парных сравнений и учетом подобия матриц с симметрией относительно главной побочной диагонали.

**Основная часть.** Обратносимметричная матрица парных сравнений однозначно определяется элементами над (или под) главной диагональю. Количество таких элементов для матрицы размерности  $N$  составляет  $S = \frac{1}{2}(N^2 - N)$ .

Количество необходимых расчетов можно сократить, если использовать свойство «симметрии» блоков (рис. 1). Отметим, что подобие матриц осуществляется только в случае симметрии всего блока, а не отдельных элементов в блоках [7].

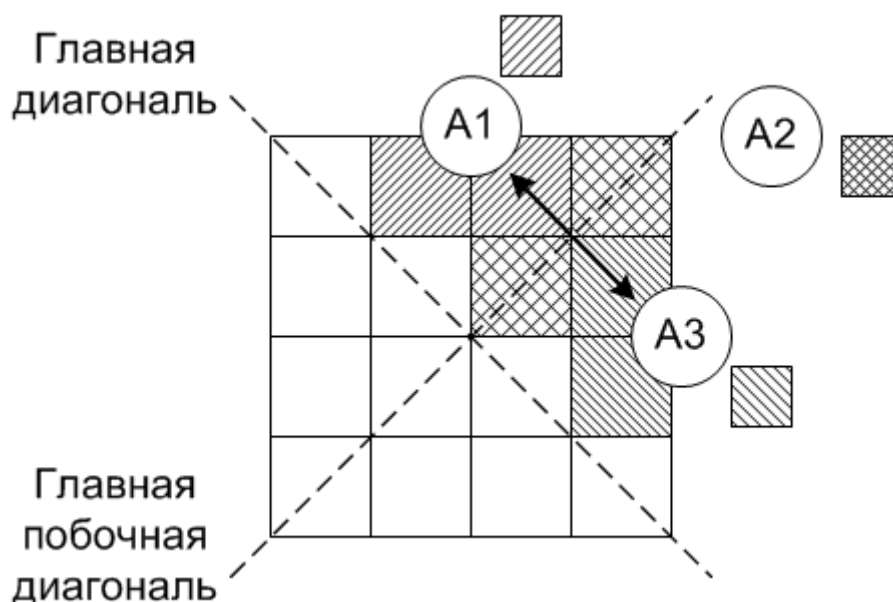


Рис.1. Схема симметрии блоков

Общее количество возможных вариантов матриц при использовании шкалы (1), содержащей  $C = 17$  различных элементов, представлено в таблице 1, где  $S$  – количество определяющих элементов матрицы (количество элементов над главной диагональю),  $K$  – количество возможных матриц,  $K^*$  – количество матриц с учетом симметрии,  $B$  – выигрыш от использования симметрии в %.

Таблица 1

Количество матриц для шкалы  $\Omega$  (1)

N	S	K	K*	B	N	S	K	K*	B
3	3	4913	2601	47.05	7	21	6.9E+25	3.5E+25	50
4	6	2.4E+7	1.2E+7	49.83	8	28	2.8E+34	1.4E+34	50
5	10	2.0E+12	1.0E+12	50	9	36	2.0E+44	9.9E+43	50
6	15	2.9E+18	1.4E+18	50	10	45	2.3E+55	1.2E+55	50

Подобие обратно-симметричных матриц относительно побочной диагонали позволяет уменьшить количество необходимых вычислений на 47-50%.

Задача полного перебора требует генерации всех возможных матриц парных сравнений. Очевидно, что хранение всех сгенерированных матриц в оперативной памяти, особенно для матриц большой размерности, нерационально. Хранение данных на жестком диске так же не является альтернативой, так как существенно возрастет время доступа к данным (скорость чтения/записи).

Наиболее эффективным представляется подход, который позволит на основе числового индекса определить все элементы матрицы: то есть необходимо определить совокупность правил и знаков, с помощью которых можно отобразить (кодировать) любое неотрицательное число.

Данная формулировка очень похожа на определение позиционной системы исчисления. В таблице 2 приведен сокращенный список матриц для  $N=3$  ( $S=3$ ) и  $\Omega_2 = \{1/2, 1, 2\}$ .

Таблица 2

Соответствие матриц системе исчисления

№	Значения элементов над главной диагональю	Представление в форме позиционной системы исчисления с основанием 3
1	1/2, 1/2, 1/2	0 0 0
2	1/2, 1/2, 1	0 0 1
3	1/2, 1/2, 2	0 0 2
4	1/2, 1, 1/2	0 1 0
...	...	...
26	2 2 1	2 2 1
27	2 2 2	2 2 2

Легко заметить, что представление каждой следующей матрицы в форме позиционной системы исчисления – это результат сложения единицы к предыдущему результату. При этом, в силу симметрии блоков  $A_1$  и  $A_3$  (рис. 1), у матриц 001 и 100 значения  $\lambda_{\max}$  будут одинаковы, т.е. достаточно вычислить значение  $\lambda_{\max}$  для одной из них и удвоить его.

Чтобы избежать ненужной генерации матриц с симметрией блоков  $A_1$ ,  $A_3$  в форме позиционной системы исчисления вычисления организованы следующим образом (рис. 2).

Каждый из блоков  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  – является набором элементов матрицы, а операции сравнения и инкремента организованы по принципу позиционной системы исчисления. Значение  $A\_END$  -

эквивалентно максимальному значению для данной системы исчисления и является критерием останова расчета.

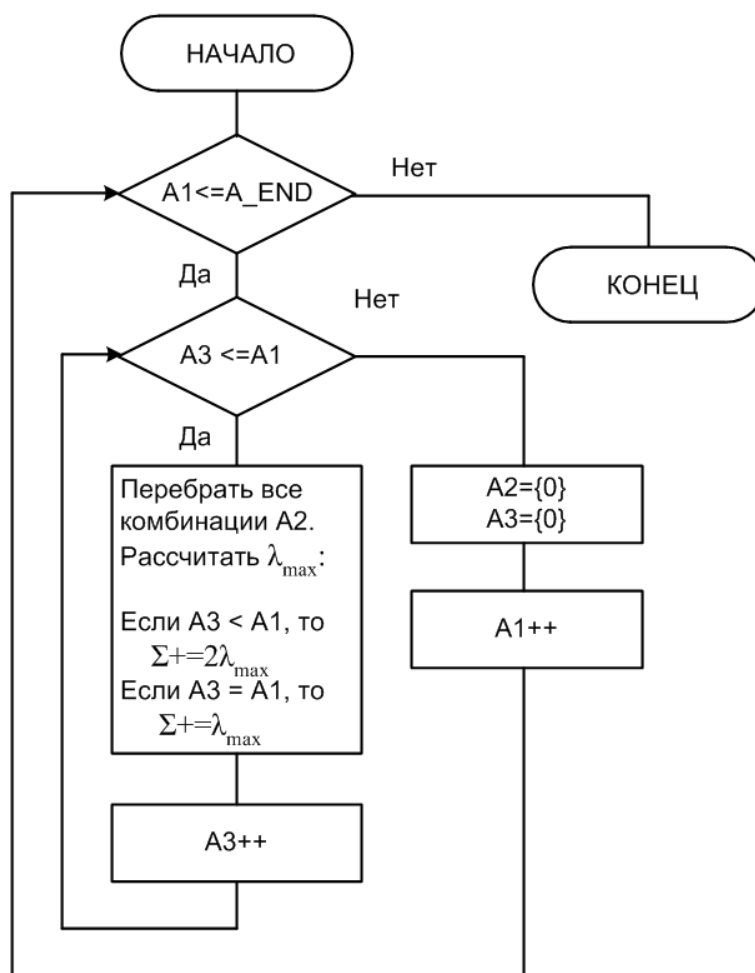


Рис. 2. Блок-схема алгоритма

**Выводы.** Предложенный алгоритм реализации перебора матриц учитывает как обратную симметрию элементов, так и подобие относительно главной побочной диагонали [7] и позволяет уменьшить количество необходимых вычислений на 47-50%.

### Литература

1. Saaty T. The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation / T.L. Saaty. – New York : McGraw-Hill, 1980. – ISBN 0-07-054371-2. – 287 p.
2. Попович Е.С. Особенности определения индекса случайной согласованности в метода анализа иерархий (МАИ) / Е.С. Попович, А.Д.Финогенов, П.Л. Литвиненко // «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності» : 3-а міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених, 22-23 квітня 2014, Київ : матеріали. – К., 2014. – С. 205–210.

3. Saaty T. Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios / T.L.Saaty, G. Vargas Luis // *Mathematical Modelling*. – 1984. – Vol. 5. – P. 309–324.
4. Панкратова Н.Д. Моделі і методи аналізу ієрархій. Теорія. Застосування : навч. посібник / Н.Д. Панкратова, Н.І.Недашковська. – К. : ІВЦ Видавництво «Політехніка», 2010. – 372 с.
5. Tummala V.M.R. A note on the computation of the mean random inconsistency index of the analytic hierarchy process (AHP) / V.M.R. Tummala // *Theory and Decision*. – 1998. – № 44. – P. 221–230.
6. Alonso J.A. Consistency in the analytic hierarchy process: a new approach / Jose Antonio Alonso, Ma Teresa Lamata // *International Journal of Uncertainty: Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. – 2006. – Vol. 14. – № 4. – P. 445-459.
7. Муха И.П. Подобие обратно-симметричных матриц относительно побочной диагонали / И.П. Муха, П.Л. Литвиненко, А.Д. Финогенов // *Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць*. – 2016. – Вип. 6. – С. 86-90. – ISBN 978-617-7346-42-4.

### **АЛГОРИТМ ПОВНОГО ПЕРЕБОРУ МАТРИЦЬ В МЕТОДІ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ**

Залевська О.В., Литвиненко П.Л., Фіногенов О.Д., Янушевська О.І.

*В роботі запропоновано алгоритм повного перебору обернено-симметричних матриць з урахуванням подібності відносно головної побічної діагоналі.*

*Ключові слова: метод аналізу ієрархій (МАІ), парні порівняння, багатокритеріальне прийняття рішень, алгоритм повного перебору.*

### **THE EXHAUSTIVE SEARCH MATRIX ALGORITHM IN THE ANALYTIC HIERARCHY PROCESS**

Zalevska O., Litvinenko P., Finogenov A., Yanushevskia O.

*The paper proposes an exhaustive search algorithm for the inverse-symmetric matrices, taking into account the similarity with the main secondary diagonal.*

*Key words: AHP, pairwise comparison, multicriteria decision making, exhaustive search algorithm.*