УДК 515.2

ТРАНСФОРМУВАННЯ СФЕРИЧНОЇ ХРЕСТОПОДІБНОЇ СТЕРЖНЕВОЇ КОНСТРУКЦІЇ В УМОВАХ НЕВАГОМОСТІ

Куценко Л.М., д.т.н.,
Національний університет цивільного захисту України
(м. Харків, Україна)
Запольський Л.Л., к.т.н.
Український науково-дослідний інститут цивільного захисту
(м. Київ, Україна)

Досліджено геометричну модель розкриття в умовах невагомості стержневої конструкції, аналогічної подвійному сферичному маятнику. Для ініціювання руху змодельовані дії імпульсних реактивних двигунів, встановлених на кінцевих точках ланок конструкції.

Ключові слова: подвійна сферична стержнева конструкція, розкриття конструкції у невагомості, рівняння Лагранжа другого роду.

Постановка проблеми. Компоненти великогабаритних космічних стержневих конструкцій доставляються на орбіту у згорнутому вигляді. Після чого необхідно їх трансформувати з метою надання стержням запланованої просторової форми. Зазначене трансформування здійснюються за допомогою механічної операції *розкриття* [1]. У даній роботі розкриття подвійної (для прикладу) стержневої конструкції розглядається як аналог «коливання» подвійного сферичного маятника у невагомості. Зазначимо, що термін «маятник» у випадку невагомості застосовувати не коректно. Тому далі вживатимемо термін «подвійна сферична стержнева конструкція».

При реалізації розкриття подвійної сферичної стержневої конструкції у невагомості виникає проблема вибору способів активації її руху. В якості засобів ініціювання розкриття пропонується використовувати імпульсні реактивні двигуни (типу піропатронів), встановлених на кінцевих точках ланок стержневої конструкції. Динаміку процесу розкриття конструкції доцільно досліджувати на основі варіаційного принципу Лагранжа. При цьому необхідно адаптувати до невагомості «коливання» подвійного сферичного маятника. При складанні рівнянь Лагранжа другого роду потенціальну енергію консервативної механічної системи вважатимемо «близькою до нуля» [2]. Піротехнічні пристрої набагато легші і дешевші

порівняно з засобами ініціювання розкриття конструкції, такими, як електродвигуни або пружинні пристрої з термопам'яттю. Крім того, піротехнічні пристрої економічно рентабельні у випадках, коли операцію розкриття необхідно використати на орбіті лише однин раз. Все це вказує на доцільність дослідження моделей розкриття стержневих конструкцій в умовах невагомості з імпульсними двигунами на кінцевих точках їх ланок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На практиці більш вживаними є каркасні тросові системи розкриття, де за допомогою електродвигунів та тросів здійснюється синхронізація зміни величин кутів між суміжними ланками. У роботах [3, 4] наведені математичні моделі процесу розкриття багатоланкової каркасної конструкції сонячної батареї із тросовою системою синхронізації. При цьому на основі аналізу кінематичної схеми системи розкриття необхідно обрати розміри радіусів роликів і передатного відношення двох типів шестерних механізмів, що забезпечують задану послідовність фіксації ланок. Для дослідження процесу розкриття сонячної батареї використане рівняння Лагранжа другого роду [4]. Але застосування тросової системи розкриття на практиці обмежено розмірами конструкції та необхідністю синхронізувати дію електродвигунів, що є самостійною задачею при великій кількості ланок. Для чисельного аналізу процесу розкриття конструкцій, що трансформуються, використовують можливості сучасних пакетів моделювання динаміки механічних систем. Робота [5] присвячена методу розрахунку розкриття великогабаритних конструкцій з використанням програмних комплексів MSC.Software. В роботі [6] наведено приклад розрахунку розкриття за допомогою комплексу автоматизованого динамічного аналізу багатокомпонентних механічних систем EULER. Але зазначені програмні продукти не розраховані без відповідних надбудов на реалізацію інерційного способу розкриття багатоланкових конструкцій. Інші варіанти систем розкриття наведені у огляді літератури [7].

Формулювання цілей статті. Розробити геометричну модель розкриття в умовах невагомості стержневої конструкції, аналогічної подвійному сферичному хрестоподібному маятнику. Для ініціювання руху конструкції змоделювати дію імпульсних піротехнічних реактивних двигунів, встановлених на кінцевих точках ланок конструкції.

Основна частина. Розглянемо рух подвійної сферичної стержневої конструкції у невагомості. Оберемо її хрестоподібну модифікацію. Узагальненими координатами вважатимемо кути $u_1(t)$ і $v_1(t)$, а також $u_2(t)$ і $v_2(t)$, утворені, відповідно, горизонтальними проекціями стержнів з віссю Ox, і цими стержнями з віссю Oz (рис. 1).

Перша ланка початковою точкою прикріплена до нерухомої точки O, а серединні точки ланок довжиною $2r_1$ і $2r_2$ співпадають. Нерухомість точки кріплення O забезпечується завдяки її приєднанню до космічного апарату, маса якого на порядки більша маси вантажу маятника. На кінцях стержнів закріплені вантажі масами m_1 і m_2.

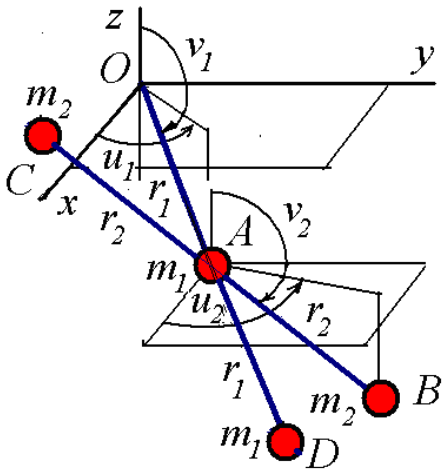


Рис. 1. Схема сферичної хрестоподібної стержневої конструкції

Ініціювання коливань подвійної сферичної стержневої конструкції у невагомості здійснюється шляхом вибору напрямку дії та величини імпульсів, наданих прикінцевим точкам ланок маятника за допомогою реактивних двигунів імпульсного типу. Віртуальний вектор $\mathbf{R}_{V1}$ одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута v_1, а віртуальний вектор $\mathbf{R}_{U1}$ одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута u_1. Сумарний реальний вектор $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{U1} + \mathbf{R}_{V1}$ визначає необхідний напрямок дії імпульсу першого реактивного двигуна.

Аналогічно, віртуальний вектор $\mathbf{R}_{V2}$ одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута v_2, а віртуальний вектор $\mathbf{R}_{U2}$ одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута u_2. Сумарний реальний вектор $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{U2} + \mathbf{R}_{V2}$ визначає необхідний напрямок дії імпульсу другого реактивного двигуна.

Ці вимоги до організацій дії рушіїв коливання стержневої конструкції висуває конкретні умови до конструкції сферичного шарніру, розташованого між ланками конструкції. А саме, сферичний шарнір у вузлі повинен забезпечувати розкриття його ланок за умови існування двох осей обертання, яка проходить через центральну точку шарніру. Цього можна досягти завдяки належній конструкції сферичного шарніру вузла маятника, описаній, наприклад, в [8].

Розрахунки коливання хрестоподібного сферичного маятника виконаємо за допомогою лагранжіана за умови відсутності дисипативних сил і з врахуванням «нульової» потенціальної енергії:

$$L = 0,5r_1m_1\left(x_A'^2 + y_A'^2 + z_A'^2\right) + 0,5r_1m_1\left(x_B'^2 + y_B'^2 + z_B'^2\right) +$$
$$+0,5r_2m_2\left(x_C'^2 + y_C'^2 + z_C'^2\right) + 0,5r_2m_2\left(x_D'^2 + y_D'^2 + z_D'^2\right), \qquad (1)$$

де $x_A(t) = r_1\cos\left(u_1(t)\right)\sin\left(v_1(t)\right)$;

$y_A(t) = r_1\sin\left(u_1(t)\right)\sin\left(v_1(t)\right)$;

$z_A(t) = r_1\cos\left(v_1(t)\right)$;

$$
\begin{aligned}
&x_B(t) = r_1\cos\left(u_1(t)\right)\sin\left(v_1(t)\right) + r_2\cos\left(u_2(t)\right)\sin\left(v_2(t)\right);\\
&y_B(t) = r_1\sin\left(u_1(t)\right)\sin\left(v_1(t)\right) + r_2\sin\left(u_2(t)\right)\sin\left(v_2(t)\right);\\
&z_B(t) = r_1\cos\left(v_1(t)\right) + r_2\cos\left(v_2(t)\right);\\
&x_C(t) = r_1\cos\left(u_1(t)\right)\sin\left(v_1(t)\right) - r_2\cos\left(u_2(t)\right)\sin\left(v_2(t)\right);\\
&y_C(t) = r_1\sin\left(u_1(t)\right)\sin\left(v_1(t)\right) - r_2\sin\left(u_2(t)\right)\sin\left(v_2(t)\right);\\
&z_C(t) = r_1\cos\left(v_1(t)\right) - r_2\cos\left(v_2(t)\right);\\
&x_D(t) = 2r_1\cos\left(u_1(t)\right)\sin\left(v_1(t)\right);\\
&y_D(t) = 2r_1\sin\left(u_1(t)\right)\sin\left(v_1(t)\right);\\
&z_D(t) = 2r_1\cos\left(v_1(t)\right).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

З використанням лагранжіану L утворимо систему чотирьох рівнянь Лагранжа другого роду:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u_1'}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_1} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_1'}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_1} = 0; \tag{3}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u_2'}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_2'}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_2} = 0.
$$

Тут $u_1' = \frac{d}{dt}u_1(t)$; $v_1' = \frac{d}{dt}v_1(t)$; $u_2' = \frac{d}{dt}u_2(t)$; $v_2' = \frac{d}{dt}v_2(t)$ - похідні функції опису узагальнених координат. З причини громіздкості в розгорнутому вигляді рівняння (3) не наводяться. Воно існує в електронному вигляді у середовищі maple. Зазначимо, що аналітичні вирази для рівнянь Лагранжа другого роду, як правило, є надто громіздкими. Тому бажано користуватись комп’ютерними пакетами, спроможними оперувати з аналітичними виразами. Наприклад, пакет maple дозволяє оперувати з наближеним розв’язком диференціального рівняння як з функцією.

При розв’язанні системи рівнянь (3) слід враховувати координати таких векторів: довжин ланок маятника: **L**={r_1, r_2,}; значень мас вантажів: **m**={m_1, m_2}; значень початкових кутів відхилень: $\mathbf{U_0}$={$u_1(0)$, $v_1(0)$, $u_2(0)$, $v_2(0)$}, а також значень швидкостей, наданих кутам відхилень: $\mathbf{U_0'}$={$u_1'(0)$, $v_1'(0)$, $u_2'(0)$, $v_2'(0)$}. Систему рівнянь Лагранжа другого роду (3) розв’язано наближено методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету maple. Одержані розв’язки умовно позначено символами $U_1(t)$, $V_1(t)$, $U_2(t)$, $V_2(t)$. Це дозволяє у просторовій системі координат $Oxyz$ за допомогою формул (2) визначити «реальні» координати кінцевих вузлових точок другої ланки маятника в момент часу t. Для обчислення цих координат у виразах (2) опису координат вузлових елементів маятників необхідно

формально замінити малі літери *u* і *v* на великі *U* і *V*. Наближений вигляд траєкторії переміщення кінцевої точки одержимо, сполучивши обчислені близькі точки відрізками.

Одержані залежності для функцій узагальнених координат дозволяють спостерігати за взаємним положенням ланок конструкції протягом певного відрізку часу. Можна обрати той момент часу, коли подвійна сферична стержнева конструкція набуде необхідної для досліджень просторової форми. Крім того, можна побудувати графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених координат, а також перших та других похідних цих функцій. А це, в свою чергу, дозволяє оцінити силові характеристики системи в момент фіксування (стопоріння) розкриття. Силові характеристики обчислюються як добуток відповідної маси на значення другої похідної функції узагальненої координати (тобто прискорення). У випадку, коли значення силових характеристик є недопустимими, то за допомогою комп'ютерної анімації можна визначити інший момент часу, коли в процесі розкриття стержнева конструкція набуде іншої прийнятної форми.

Для запобігання хаотичності при формоутворенні конструкції необхідно параметри підібрати так, щоб кінцева точка другої ланки рухалась по циклічній нехаотичній траєкторії. Наявність циклічних траєкторій кінцевої точки другої ланки вважатимемо критерієм нехаотичності руху елементів стержневих конструкцій. Циклічні нехаотичні траєкторії кінцевих точок визначаємо способом «фокусування» сім'ї кривих [9, 10].

Наведемо приклад трансформування у невагомості шести подвійних хрестоподібних стержневих конструкцій зі спільною точкою кріплення. Така конструкція може ілюструвати модель силового каркасу космічного об'єкту. У початковому положенні стержневі конструкції розташовані в межах умовної площині [11, 12]. Значення параметрів в умовних величинах. Кути між початковими розташуваннями стержневих конструкцій складають π/3.

Приклад. Нехай r_1=1; r_2=2; m_1=1;, m_2=1. Початковими значеннями оберемо $\mathbf{U_0}$={0, π/2, -π, π/2}, $\mathbf{U_0'}$={1, 1, -0.5, 0.5}. Час інтегрування *T* = 9. На рис. 4 наведено циклічну траєкторію руху точки кінцевої точки *A*, а на рис. 5 зображено положення трьох стержневих конструкцій в момент часу t=1,4.

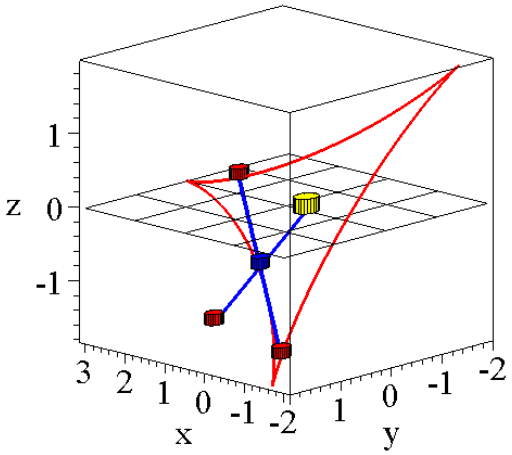


Рис. 2. Траєкторія руху кінцевої точки другої ланки

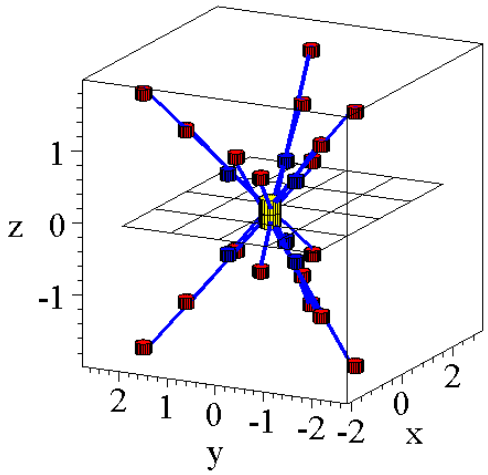
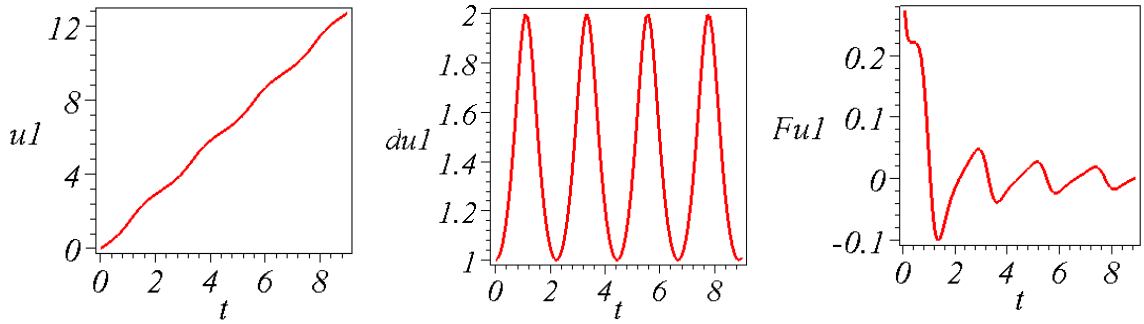


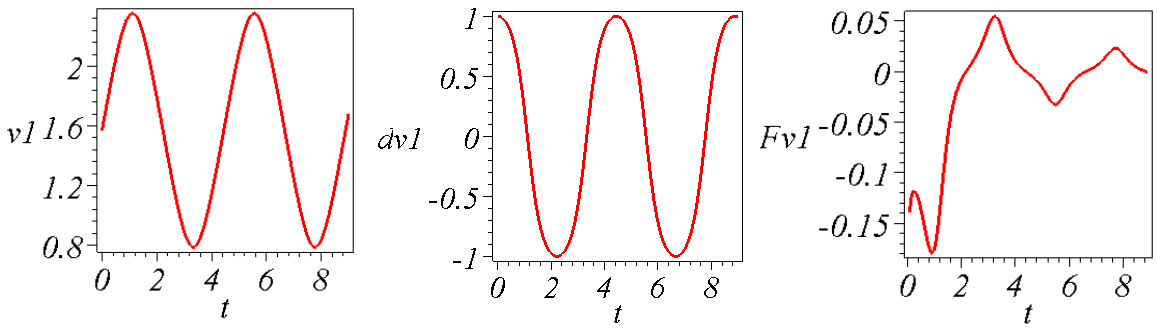
Рис. 3. Положення трьох стержневих конструкцій в момент часу t=1,4

На рис. 4 - 7 наведено графіки функцій узагальнених координат, а також графіки силових характеристик F_1 і F_2, побудованих з використання залежностей для другої похідної функцій узагальнених координат. На рис. 8 зображено фазові траєкторії узагальнених координат.



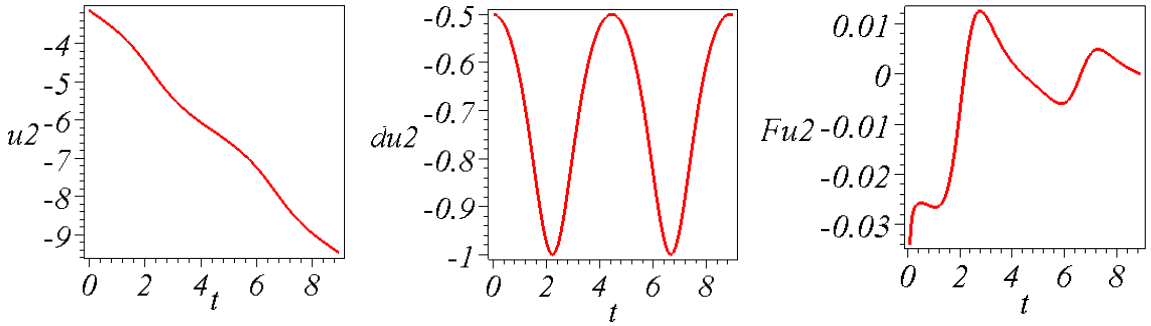
а *б* *в*

Рис. 4. Графіки узагальненої координати $u_1(t)$ першої ланки:
а – $u_1(t)$; *б* – $du_1(t)/dt$; *в* – Fu_1 обчислене через $d^2u_1(t)dt^2$



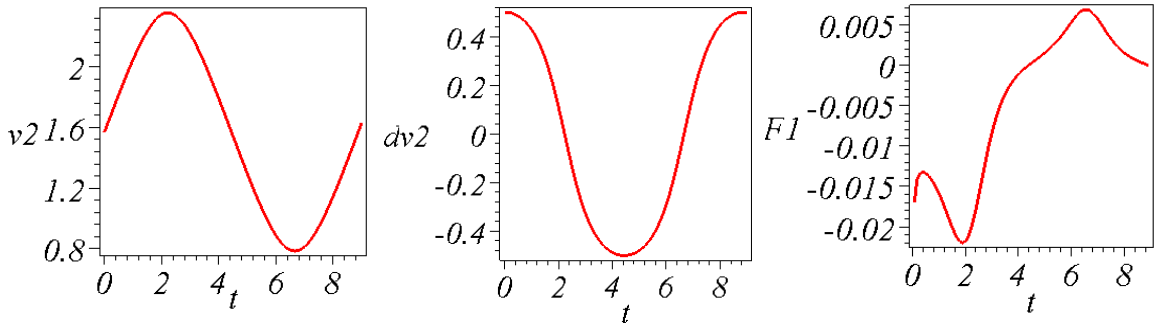
а *б* *в*

Рис. 5. Графіки узагальненої координати $v_1(t)$ першої ланки:
а – $v_1(t)$; *б* – $dv_1(t)/dt$; *в* – Fv_1 обчислене через $d^2v_1(t)dt^2$



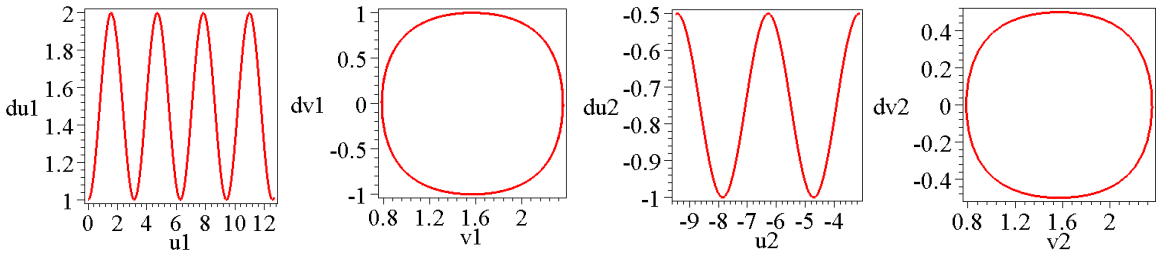
а *б* *в*

Рис. 6. Графіки узагальненої координати $u_2(t)$ другої ланки:
а – $u_2(t)$; *б* – $du_2(t)/dt$; *в* – Fu_2 обчислене через $d^2u_2(t)dt^2$



а *б* *в*

Рис. 7. Графіки узагальненої координати $v_2(t)$ другої ланки:
а – $v_2(t)$; *б* – $dv_2(t)/dt$; *в* – Fv_2 обчислене через $d^2v_2(t)dt^2$



а *б* *в* *г*

Рис. 8. Фазові траєкторії узагальнених координат:
а – $u_1(t)$; *б* – $v_1(t)$; *в* – $u_1(t)$; *г* – $v_2(t)$

Висновки. В роботі розглянуто ідеалізовану геометричну модель розкриття стержневої конструкцій, подібної до подвійного сферичного маятника. Одержані результати дозволяють обчислити і побудувати:

- циклічну нехаотичну траєкторію кінцевої точки другої ланки стержневої конструкції;
- фази розташування ланок двохланкових стержневих механізмів в довільний момент часу процесу розкриття;
- графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених

координат, а також перших та других похідних цих функцій;

- графіки швидкості, прискорення та силової характеристики зміни величин кутів як функцій узагальнених координат;

- фазові траєкторії функцій узагальнених координат, які відповідають циклічній нехаотичній траєкторії кінцевої точки другої ланки;

- варіанти розкриття декількох двохланкових стержневих механізмів зі спільною нерухомою точкою.

Література

1. Shengnan Lu. A new family of deployable mechanisms based on the Hoekens linkage Mechanism and Machine Theory [Text] / Lu Shengnan, Zlatanov Dimiter, Ding Xilun, Molfino Rezia. – 2014. – Vol.73. – P.130–153.
2. Szuminski W. Dynamics of multiple pendula without gravity [Електроний ресурс] / W. Szuminski // Chaotic Modeling and Simulation. – 2014. – Issue 1. – P.57–67. Режим доступу: http://www.cmsim.eu/papers_pdf/january_2014_papers/7_CMSIM_Journal_2014_Szuminski_1_57-67.pdf.
3. Deployable Perimeter Truss with Blade Reel Deployment Mechanism [Електроний ресурс] / NASA's Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California (01 March 2016). Режим доступу: https://www.techbriefs.com/component/content/article/tb/techbriefs/mechanics-and-machinery/24098.
4. Бушуев А. Ю. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади [Текст] / А. Ю. Бушуев, Б. А. Фарафонов // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 2.– С.101–114.
5. Щесняк С. Проектирование и расчет крупногабаритных раскрывающихся конструкций с помощью программных комплексов MSC.Software [Текст] / С.Щесняк, А. Романов // CADmaster. – 2009. – № 2–3. – С.28—36.
6. Бойков В. Г. Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER [Текст] / В. Г. Бойков // САПР и графика. –2009. –№ 9. – С.17–20.
7. Зимин В. Н. Особенности расчета раскрытия крупногабаритных трансформируемых конструкций различных конфигураций [Текст] / В. Н. Зимин, А. В. Крылов, В. Е. Мешковский, А. Н. Сдобников, Ф. Р. Файзуллин, С. А. Чурилин // Наука и Образование. – МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – № 10. – С.179–191.
8. Bomba R. Computer Simulation of a 3D, 3Link, Diver with Cross

Product Driven PD Control [Text] / R. Bomba. – University of Rochester, Rochester, New York, 2008. – 299 p.
9. Семків О.М. Графічний комп'ютерний спосіб визначення нехаотичних траєкторій коливань маятникових систем [Текст] / О.М. Семків // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – Харьков: ХНАДУ, 2016. – Вып. 72. – С. 94–101.
10. Development of Projection Technique for Determining the Non-Chaotic Oscillation Trajectories in the Conservative Pendulum Systems / O. Semkiv, O. Shoman, E. Sukharkova and others // Eastern-European Journal of Eenterprise Technologies. Mathematics and Cybernetics. – № 2/4 (86). – 2017. – С.48–57.
11. Geometrical modeling of the inertial unfolding of a multi-link pendulum in weightlessness / L. Kutsenko, O. Shoman, O. Semkiv, L. Zapolsky, I. Adashevskay and others // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 6/7 (90). – 2017. – P. 42-50.
12. Куценко, Л. М. Ілюстрації до геометричного моделювання інерційного розкриття багатоланкового маятника у невагомості [Електронний ресурс] / Л. М. Куценко // Режим доступу: http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/4868.

ТРАНСФОРМИРОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ КРЕСТООБРАЗНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

Куценко Л.Н., Запольский Л.Л.

Исследована геометрическая модель раскрытия в условиях невесомости стержневой конструкции, аналогичной двойному сферическому маятнику. Для инициирования движения смоделированы действия импульсных реактивных двигателей, установленных на конечных точках звеньев конструкции.

Ключевые слова: двойная сферическая стержневая конструкция, раскрытие конструкции в невесомости, уравнение Лагранжа второго рода.

TRANSFORMING THE SPHERICAL CROSS-CUTTING ROD STRUCTURES IN WEIGHTLESSNESS

Kutsenko L., Zapolskiy L.

A geometric model of the opening under weightless conditions of a rod structure analogous to a double spherical pendulum is investigated. To initiate the motion, the actions of impulse jet engines simulated at the end points of the links of the structure are simulated.

Keywords: double spherical rod structure, construction opening in weightlessness, Lagrange equation of the second kind.