УДК 514.18

ВИЗНАЧЕННЯ ДИВЕРГЕНЦІЇ В ТОЧКАХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОГО НЕВПОРЯДКОВАНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Черняк В.І., к.т.н.
Кременецький лісотехнічний коледж (Україна)

В роботі розглядається спосіб визначення дивергенції в точках дискретного векторного поля, заданого на невпорядкованій множині точок в просторах довільної вимірності.

***Ключові слова**: дивергенція, дискретне векторне поле, тріангуляція.*

***Постановка проблеми**.* **Дивергенція** (div **a**) — скалярне поле, яке характеризує густину джерел даного векторного поля **a**. Дивергенція показує продукується (div **a** >**0**) чи поглинається (div**a** <**0**) векторне поле в даній точці та визначає інтенсивність (густину) цих процесів (1).

Дивергенцією векторного поля ***a*** в тривимірному просторі називається скалярна величина [2]:

$$diva = \frac{da_x}{dx} + \frac{da_y}{dy} + \frac{da_z}{dz}. \qquad (1)$$

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Якщо векторне поле задане на прямокутній сітці, то засоби MATLAB в двовимірному просторі для заданої точки визначають дивергенцію векторного поля за формулою:

$$div \quad a5 = \frac{a6_X - a4_X}{x2 - x1} + \frac{a8_Y - a2_Y}{y2 - y1}, \qquad (2)$$

де **a1, a2… a9** – значення векторного поля ***a*** у відповідних вузлах сітки (рис. 1).

Тестування показало адекватність цього методу тільки при заданні векторного поля на рівномірній регулярній сітці.

***Формулювання цілей статті**.* Метою статті є розробка способу визначення дивергенції дискретного векторного поля, заданого на невпорядкованій множині точок, в просторі довільної вимірності.

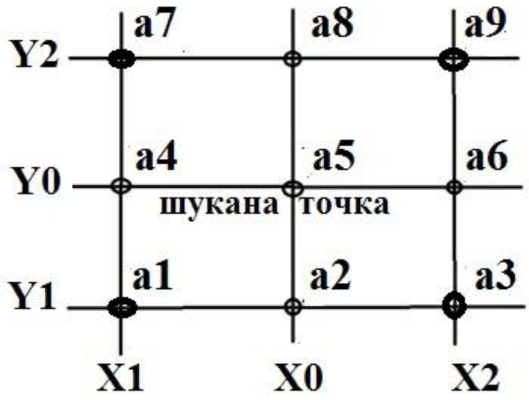

Рис. 1. Фрагмент векторного поля в двовимірному просторі, заданого на прямокутній рівномірній сітці

Основна частина. В даній праці розроблено два способи визначення дивергенції векторного поля в заданій точці.

1 спосіб. Градієнт скалярного поля в даній у класичній теорії точці визначається за формулою [2]:

$$grad\boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} \qquad (3)$$

Порівнянні формул (1) і (3) показує, що перша координата градієнта скалярного поля $\mathbf{a}_X$ є першою складовою дивергенції векторного поля **a,** друга координата градієнта скалярного поля $\mathbf{a}_Y$ є другою складовою дивергенції векторного поля **a,** і т. д. Звідси випливає – визначення дивергенції векторного поля **a** зводиться до визначення координат градієнтів скалярних полів, які є відповідними координатами векторного поля.

Градієнт скалярного поля визначаємо за методом, описаним в праці [3].

2 спосіб ґрунтується на тому, що координати заданого векторного поля інтерполюються поверхнею другого порядку, після чого визначається дивергенція в шуканій точці за формулою (2).

Алгоритм визначення дивергенції в точці **a5** (рис. 1) дискретного невпорядкованого векторного поля в двовимірному просторі буде складатися з таких дій.

1. Апроксимуємо кожну координату векторного поля поверхнею другого порядку.
2. Проводимо через задану точку дві прямі лінії паралельно до осей координат.
3. Будуємо на цих осях точки **a2, a4, a6** та **a8** (рис. 1) рівновіддалені від точки **a5**.
4. Визначаємо значення координат векторного поля у вказаних вище точках.
5. Визначаємо дивергенцію поля div **a** формулою (1).

Протестуємо і порівняємо авторські способи визначення дивергенції і спосіб, реалізований в системі комп'ютерної математики MATLAB. Для цього отримані за трьома способами значення будемо порівнювати із значеннями дивергенції, одержаними за аналітичними рівняннями. Для кожного поля вихідні дані будемо задавати в двох варіантах: на прямокутній рівномірній сітці **[-2:0.2:4]** (в таб. 1 похибка – чисельник) і на нерівномірній сітці **[-2:0.2:4]+rand/100** (в таб. 1 похибка – знаменник), де **rand –** генератор випадкових чисел від 0 до 1. Похибку обрахунків будемо визначати як відношення різниці дивергенцій (обчисленої div $\mathbf{a}_Д$ і аналітичної div $\mathbf{a}_А$) до величини аналітичної дивергенції:

$$\Delta = \frac{|\Delta \mathrm{div}\, a|}{\mathrm{div}\, a_a} = \frac{|\mathrm{div}\, a_a - \mathrm{div}\, a_Д|}{\mathrm{div}\ \mathrm{a}_a} 100\% \quad . \tag{4}$$

Загальне значення похибки визначається як середнє арифметичне похибок у всіх точках сітки.

Таблиця 1

Похибки визначення дивергенції

	Рівняння поля та її дивергенції	Похибка (засоби MATLAB)	Похибка (перший спосіб)	Похибка (другий спосіб)
1	**a** =(x, y)	0	0	0
	div **a** = 2	10.57	0	0
2	**a** =(2x+y, x+4y)	0	0	0
	div **a** = 6	5.95	0	0
3	**a** =(x^2, y^2)	9.55	3.99	0
	div **a** = 2x + 2y	14.48	13.73	0
4	**a** =(1-cos(2x-y), $2y^3$)	33.49	27.71	12.12
	div **a** = 2sin(2x-y) + $6y^2$	36.35	29.76	11.41
5	**a** =(sin(x), sin(y))	2.1199	4.3840	1.815
	div **a** = cos(x) + cos(y)	2.4300	2.1497	2.268
6	**a** =(1-cos(2x-y), $2y^3$, z)	9.5181	11.2334	2.0422
	div **a** = 2sin(2x-y) + $6y^2$+1	44.9747	16.2458	1.3698
7	**a** =(x, y, z)	0	0	0.8745
	div **a** = 3	24.8544	0	0
8	**a** =(x^2, y^2, $(x+z)^3$)	1.2429	1.0126	0.5055
	div **a** = 2x + 2y+3$(x+z)^2$	25.4921	3.3360	0.0455
9	**a** =(x^2, y^2, z^2)	0.8343	0.6723	2,6589
	div **a** = 2x + 2y+2z	26.6247	1.6366	0
10	**a** =(x, y, z, q)	0	0	3.2347
	div **a** = 4	14.5467	0	0
11	**a** =(x^2, $2y^3$, $(z-q)^2$, q)	10.6523	1.5071	0.3911
	div **a** = 2x + $6y^2$+2(z-q)+1	22,6589	3.5435	0.2606

Висновки. Запропоновано способи визначення дивергенції дискретно представленого невпорядкованого векторного поля в просторах довільної вимірності. Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку алгоритмів визначення параметрів та характеристик дискретних невпорядкованих векторних полів.

Література

1. Дивергенція (математика) [Електроний ресурс]. Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Дивергенція_(математика).
2. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля / И.А.Гольдфайн – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 132 с.
3. Черняк В.І. Визначення градієнта скалярного поля, заданого на плоскій невпорядкованій множині точок / В.І.Черняк // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В.Найдиш. – Мелітополь, 2016. – Вип. 6. – С. 135-139.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ В ТОЧКАХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННОГО НЕУПОРЯДОЧЕННОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Черняк В.И.

В работе рассматривается способ определения дивергенции дискретного векторного поля, заданного на неупорядоченном множестве точек в пространствах произвольной размерности.

Ключевые слова: дивергенция, дискретное векторное поле, триангуляция.

DEFINITION OF DIVERGENCE PRESENTED IN POINTS OF DISCRETELY DISORDERED VECTOR FIELDS

Chernyak V.

In this paper considers a method definition divergence of discrete vector field, defined on the set of unordered points in spaces of arbitrary dimension.

Keywords: divergence, discrete vector field, triangulation.