УДК 515.2

ПРО ФОРМОУТВОРЕННЯ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ ЗА ЗАДАНИМ ЗАКОНОМ РОЗПОДІЛУ ДОТИЧНИХ, ЩО ЇЇ ОГИНАЮТЬ

Білицька Н.В.. к.т.н.,
Гетьман О.Г., к.т.н.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Україна)

В роботі пропонується алгоритм формоутворення плоскої кривої за заданим законом розподілу дотичних, що її огинають, за допомогою апарата сплайн-апроксимації.

Ключові слова: інтерполяція, сплайн-апроксимація, дотична, кубічний сплайн, система рівнянь.

Постановка проблеми. Існує низка задач, коли плоска крива задається сукупністю дотичних, що її огинають. Але при подальшому конструюванні таке завдання кривої є неприйнятним: крива повинна бути визначена однозначно на усій ділянці свого існування. Тому виникає необхідність аналітичного опису кривої за заданим законом розподілу дотичних.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відомі виконані дослідження з моделювання кривих, які задані дискретною низкою точок, за допомогою апарата сплайн-апроксимації [2] – [4]. Формоутворення плоскої кривої за заданим законом розподілу дотичних, що її огинають, пропонується вперше.

Формулювання цілей статті. Метою статті є розробка алгоритму моделювання плоскої кривої за заданим законом розподілу дотичних, що її огинають за допомогою апарата сплайн-апроксимації.

Основна частина. При моделюванні кривої за заданим законом розподілу дотичних, що її огинають, зробимо припущення, що вона є монотонною та безперервною на усій області свого існування. Умова гладкості кривої повинна бути гарантованою при розробці алгоритму її конструювання.

Розглянемо алгоритм формоутворення такої кривої.

Сформулюємо математичну постановку задачі. Конструювання плоскої кривої за заданим законом розподілу дотичних можна описати диференціальним рівнянням:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \ . \qquad (1)$$

Для такого рівняння може бути поставлена тільки задача з початковими умовами (задача Коши) [1]. Але в описаному випадку її необхідно розв'язувати як крайову задачу. Розв'язання рівняння (1) з крайовими умовами $y(x_0)=y_0$ та $y(x_N)=y_N$ не існує. Але якщо використати кусочну інтерполяцію, застосувавши апарат сплайн-апроксимації, така крива може бути визначеною.

Нехай $\frac{dy}{dx}=f(x)$ задана таблично та шукана функція повинна задовольняти поставленим умовам лише у передбачених вузлах апроксимації. Тобто значенням аргументу $x_0,\ldots,x_N$ шуканої функції $y=f(x)$, що описує плоску криву, відповідають значення перших похідних $\left(\frac{dy}{dx}\right)'_1, \ldots \left(\frac{dy}{dx}\right)'_N$ у передбачених вузлах апроксимації та задані значення цих функцій у першій y_0 та останній y_N точках(рис.1).

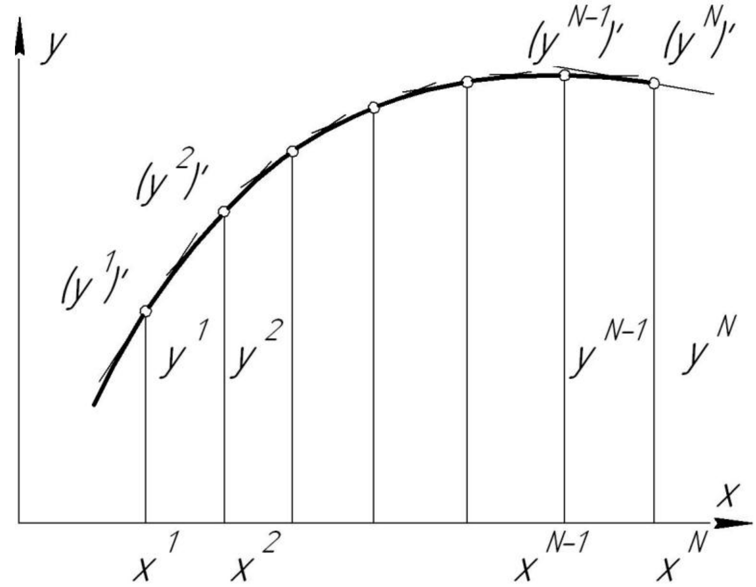

Рис. 1. Крива, що задана низкою дотичних

Необхідно отримати аналітичний опис заданої кривої. Передбачається розв'язувати таку задачу шляхом побудови кубічного сплайна, що апроксимує перші похідні при заданих значеннях аргументу. Будемо використовувати запис сплайна у вигляді:

$$S_3^j = \sum_{l=0}^{3} A_l^j \, (x - x_{1,j})^l. \qquad (2)$$

Такий сплайн повинен задовольняти наступним умовам:

1.Умові рівності значень суміжних кубічних парабол у передбачених вузлах апроксимації:

$$S_3^j(x_j) = S_3^{j+1}(x_j), j = 1, 2, \ldots N \quad .$$

2. Умові рівності перших похідних у точках стику заданій величині:

$$\left(S_3^j(x_j)\right)' = k_j, \qquad \left(S_3^j(x_{j-1})\right)' = k_{j-1}\,, \qquad j = 1, 2, \dots N.$$

3. Умові рівності другиx похідних у передбачених вузлах апроксимації:

$$\left(S_3^j(x_j)\right)'' = \left(S_3^{j+1}(x_j)\right)''\,, \qquad j = 2, 3, \dots N-1.$$

4. Крайовим умовам:

$$S_3^1(x_0) = y(x_0), \qquad S_3^{N-1}(x_N) = y(x_N).$$

Як видно із умов (1 – 4), вони дають 4(N - 1) рівнянь для визначення 4(N - 1) невідомих. Запишемо отриману систему лінійних відносно невідомих коефіцієнтів кубічних парабол, що складають сплайн, у розгорнутому виді:

$$\begin{aligned}
&A_0^1 = A_0^2 + A_1^2(x_1 - x_2) + A_2^2(x_1 - x_2)^2 + A_3^2(x_1 - x_2)^3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_0^{N-1} = A_0^N + A_1^N(x_{N-1} - x_N) + A_2^N(x_{N-1} - x_N)^2 + A_3^N(x_{N-1} - x_N)^3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_1^1 + 2A_2^1(x_0 - x_1) + 3A_3^1(x_0 - x_1)^2 = k_0,\\
&2A_1^1 = k_1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_1^N + 2A_2^N(x_{N-1} - x_N) + 3A_3^N(x_{N-1} - x_N)^2 = k_{N-1},\\
&2A_1^N = k_N\\
&2A_2^2 + 6A_3^2(x_1 - x_2) = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&2A_2^N + 6A_3^N(x_{N-1} - x_N) = 0\\
&A_0^1 + A_1^1(x_0 - x_1) + A_2^1(x_0 - x_1)^2 + A_3^1(x_0 - x_1)^3 = y(x_0).
\end{aligned} \tag{3}$$

Отримана система рівнянь досить громіздка, тому спростимо її наступним чином.

Запишемо рівняння других похідних суміжних кубічних парабол:

$$A_2^{j-1} = 6A_3^j h_j + 2A_2^j\,; \tag{4}$$

$$A_2^j = 6A_3^{j+1} h_{j+1} + 2A_2^{j+1}; \tag{5}$$

а також рівняння перших похідних, значення яких є в рівняннях (4) та (5)

$$3A_3^{j+1}h_{j+1}^2 + 2A_2^{j+1}h_{j+1} + A_1^{j+1} = A_1^j \ ; \tag{6}$$

$$3A_3^j h_j^2 + 2A_2^j h_j + A_1^j = A_1^{j-1} \ , \tag{7}$$

де $h_j = x_j - x_{j-1}$, $h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$.
Звідкіля із (6) та (7) визначаємо:

$$A_3^{j+1} = \frac{A_1^j - A_1^{j+1} - 2A_2^{j+1}h_{j+1}}{3h_{j+1}^2} \ ; \tag{8}$$

$$A_3^j = \frac{A_1^{j-1} - A_1^j - 2A_2^j h_j}{3h_j^2} . \tag{9}$$

Додавши рівняння (4) до рівняння (5) та підставивши в отриману суму значення A_3^{j+1} та A_3^j із (8) і (9) отримаємо вираз, який має вигляд:

$$A_2^{j-1} + 3A_2^j + 2A_2^{j+1} = 2\left(A_1^j \frac{h_j - h_{j-1}}{h_j h_{j-1}} - \frac{A_1^{j+1}}{h_{j+1}} + \frac{A_1^{j-1}}{h_{j-1}}\right), \tag{10}$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Оскільки

$$A_1^{j-1} = k_{j-1} \ ;$$

$$A_1^j = k_j \ ;$$

$$A_1^{j+1} = k_{j+1} \ .$$

то вираз (10) представляє собою систему N лінійних рівнянь із N невідомими A_2^{j-1}, A_2^j, A_2^{j+1}. Матриця цієї системи трьохдіагональна із головною домінуючою діагоналлю, що є необхідною та достатньою умовою стабільності цієї системи рівнянь. Для системи лінійних рівнянь із такою матрицею метод виключення Гауса виглядає досить просто.

Розв'язуючи систему рівнянь (10), отримуємо значення невідомих у кожній точці. Коефіцієнти при $(x-x_j)^3$ визначаються із співвідношень (9), $A_1^j = k_j$.

Визначення коефіцієнтів парабол закінчуємо рахуванням коефіцієнтів A_0^j при невідомих у нульовому ступені:

$$A_0^j = A_0^{j-1} - A_3^j h_j^3 - A_2^j h_j^{\,2} - A_1^j h_j \ . \tag{11}$$

Таким чином, знайдені коефіцієнти кубічних парабол, із яких складається сплайн, що апроксимує перші похідні заданої плоскої кривої: крива визначена однозначно.

Висновки. Розглянута задача має не тільки теоретичний інтерес, але й може бути застосовуваною у проектуванні робочих поверхонь грунтообробних машин [5].

Література

1. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения / Ф. Трикоми. – М.: Иностранная литература, 1962. – 352 с.
2. Стечкин С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б.Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
3. Бурова И.Г. Сплайн-всплески и их реализации / И.Г. Бурова, Ю.К.Демьянович, Т.О. Евдокимова – СПб.: СПбГУ, 2018.– 414 с.
4. Роженко А.И. Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации / А.И. Роженко. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005. – 244 с.
5. Гячев Л.В. Метод проектирования линейчатых поверхностей отвалов / Л.В. Гячев // Сборник: Вопросы механики деформируемых тел. – Ростов-на-Дону, 1972. – с.3-9.

О ФОРМООБРАЗОВАНИИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ ПО ЗАДАННОМУ ЗАКОНУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГИБАЮЩИХ ЕЕ КАСАТЕЛЬНЫХ

Білицька Н.В., Гетьман О.Г.

В работе с помощью аппарата сплайн-аппроксимации предлагается алгоритм формообразования плоской кривой по заданному закону распределения огибающих ее касательных.

Ключевые слова: интерполяция, сплайн-апроксимация, касательная, кубический сплайн, система уравнений.

ON PLANE CURVE FORM DESIGNING BY MEANS OF ITS TANGENTS CIRCUMFLEXES DISTRIBUTION LAW

Bilytska N., Hetman A.

An algorithm proposed of plane curve form designing by means of its tangents circumflexes distribution law based on spline approximation.

Key words: interpolation, spline approximation, tangent, cubic spline, system of equations.