УДК 514.18

НЕРУХОМИЙ І РУХОМИЙ АКСОЇДИ СУПРОВІДНОГО ТРИГРАННИКА ФРЕНЕ ПЛОСКОЇ НАПРЯМНОЇ КРИВОЇ

Кресан Т.А., к.т.н.,
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут» (Україна)
Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Кремець Я.С., к.т.н.
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна)

Рух супровідного тригранника Френе по напрямній кривій можна розглядати, як рух твердого тіла, закономірність якого визначено диференціальними характеристиками кривої. Оскільки тригранник рухається вздовж кривої, то його переміщення можна розглядати, як суму двох складових рухів: поступального вздовж орта дотичної і обертального навколо миттєвої осі обертання. Ці два рухи можна звести до гвинтового руху навколо миттєвої осі обертання і ковзання. Однопараметрична множина таких осей по відношенню до нерухомої системи координат утворює нерухомий аксоїд, а по відношенню до системи рухомого тригранника – рухомий.

В статті розглянуто побудову рухомого і нерухомого аксоїдів для випадку, коли напрямною лінією тригранника є плоска крива. В такому випадку ковзання відсутнє. Миттєва вісь обертання тригранника паралельна орту бінормалі і перетинає орт головної нормалі на певній відстані від бінормалі. Ця відстань чисельно рівна радіусу кривини кривої в поточній точці розташування тригранника. При русі тригранника по кривій із змінною кривиною миттєва вісь обертання рухається вздовж орта головної нормалі, залишаючись паралельною орту бінормалі. Множина положень осі миттєвого обертання в системі тригранника утворює рухомий аксоїд, яким є площина. Нерухомим аксоїдом є циліндр, поперечним перерізом якого є еволюта плоскої напрямної кривої. Показано, що рухомий аксоїд є розгорткою нерухомого. Нерухомий аксоїд є полярним торсом напрямної кривої. Сформульовано відповідне твердження.

Розглянуто конкретні приклади, коли за вихідну напрямну криву взято евольвенту кола і коло. Для кола кривина є стала, отже вісь миттєвого обертання в триграннику не рухається. Рухомий аксоїд вироджується в пряму лінію. Полярний торс для кола теж вироджується в пряму лінію, яка проходить через його центр. Перекочуванням рухомого аксоїда по нерухомому можна відтворити напрямну криву. Для кола це буде обертання прямої лінії (рухомого *аксоїда) навколо іншої прямої (нерухомого аксоїда). Відстань між ними дорівнює радіусу кривини, тобто радіусу кола. Точка на рухомому аксоїді при його обертанні навколо нерухомого опише коло.*

Ключові слова: супровідний тригранник Френе, напрямна крива, нерухомий аксоїд, рухомий аксоїд.

Постановка проблеми. Нерухомий і рухомий аксоїди є важливими характеристиками кінематики твердого тіла, які дозволяють відтворити його рух обкочуванням рухомого аксоїда по нерухомому із ковзанням вздовж спільної прямої дотику в загальному випадку. Створення геометричних моделей на основі кінематики поверхонь є не тільки засобом конструювання геометричних образів, а і основою їх відтворення. В статті розглянуто частковий випадок для плоскої напрямної кривої, коли ковзання аксоїдів відсутнє.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. При розгляді деяких задач механіки рух твердого тіла розглядається по відношенню до рухомої системи координат, яка збігається із супровідним тригранником траєкторії однієї із точок тіла [1]. Наприклад, в праці [2] наведено приклад із застосуванням тригранника Френе при розгляді руху літака в його системі. Для прикладної геометрії дослідження кінематики твердого тіла є цікавим для конструювання кінематичних поверхонь. До них відносяться ротативні поверхні, при утворенні яких беруть участь аксоїди, що обкочуються один по другому без ковзання [3], та спіроїдальні, де ковзання аксоїдів присутнє [4]. Дослідження ротативних і спіроїдальних поверхонь розглянуто в праці [5].

Формулювання цілей статті. Розробити спосіб побудови нерухомого і рухомого аксоїдів тригранника Френе напрямної плоскої кривої.

Основна частина. При русі супровідного тригранника Френе по просторовій напрямній кривій він здійснює певний рух, який можна розкласти на два складових рухи: поступальний в напрямі орта дотичної $\bar{\tau}$ із швидкістю V і обертальний навколо миттєвої осі обертання $\bar{\omega}$ з кутовою швидкістю ω (рис. 1,а). Миттєвою віссю обертання тригранника є вектор Дарбу $\bar{\omega}$ [1], який розташований в спрямній площині тригранника і складає кут φ із ортом $\bar{\tau}$.

Напрям і величина вектора Дарбу залежить від значень кривини k і скруту σ кривої в точці A розташування тригранника, причому його проекція на орт $\bar{\tau}$ чисельно рівна скрутові σ, а на орт бінормалі $\bar{b}$ - кривині k. Звідси можна знайти модуль вектора $\bar{\omega}$, тобто чисельне значення кутової швидкості ω:

$$\left|\overline{\omega}\right| = \omega = \sqrt{k^2 + \sigma^2}\ . \tag{1}$$

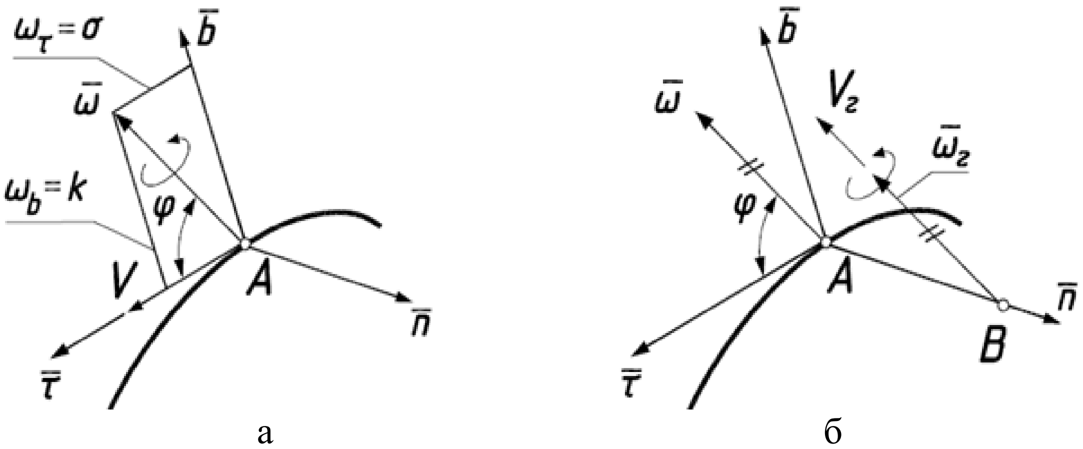


Рис. 1. Варіанти розкладання поступального і обертального рухів тригранника Френе просторової кривої:

а) обертальний рух навколо вектора Дарбу і поступальний вздовж орта дотичної;

б) обертальний рух навколо миттєвої осі обертання і ковзання і поступальний вздовж неї

Обертальний і поступальний рухи тригранника можна замінити одним гвинтовим рухом. Він буде обертатися навколо нової осі з тією ж кутовою швидкістю ω і ковзати вздовж неї із новою швидкістю $V_г$:

$$V_г = V\sigma / \sqrt{k^2 + \sigma^2}\ . \tag{2}$$

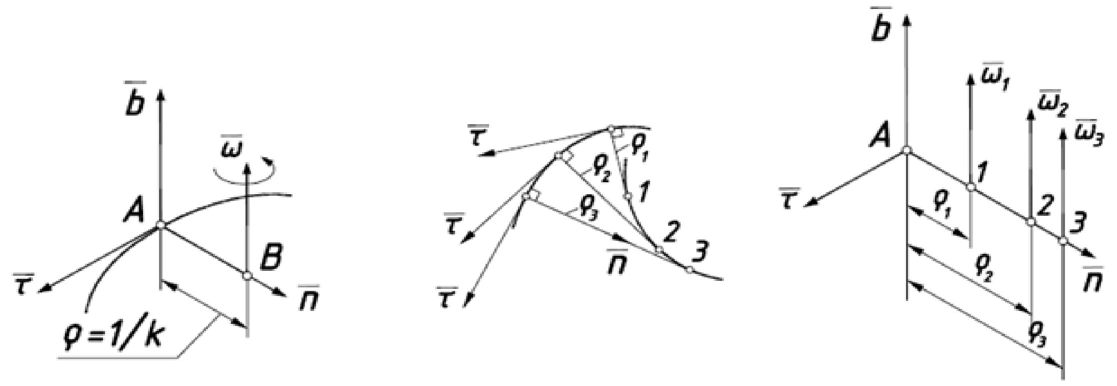
Нова вісь називається миттєвою віссю обертання і ковзання $\overline{\omega}_г$ (рис. 2,б). Вона паралельна вектору Дарбу і зміщена вздовж головної нормалі $\bar{n}$ тригранника на відстань [6]:

$$AB = \frac{k}{k^2 + \sigma^2}. \tag{3}$$

Для плоскої кривої скрут $\sigma = 0$, отже $\varphi = 90^0$. Це означає, що миттєва вісь обертання $\overline{\omega}$ збігається із бінормаллю $\bar{b}$. При переході до нової осі ми отримаємо чисте обертання без ковзання, оскільки поступальна швидкість ковзання згідно (2) дорівнюватиме нулю (рис. 2,а). Відстань розташування нової миттєвої осі обертання згідно (3) буде визначатися радіусом кривини ρ кривої в поточній точці (рис. 2,а):

$$AB = \rho = 1/k. \tag{4}$$

Побудуємо декілька положень осі миттєвого обертання тригранника, сукупність яких утворює циліндричну поверхню – нерухомий аксоїд.



а б в

Рис. 2. До побудови рухомого і нерухомого аксоїда тригранника плоскої напрямної кривої:

а) розташування в системі тригранника миттєвої осі обертання $\bar{\omega}$;
б) окремі положення миттєвої осі обертання тригранника при його русі по кривій, які належать нерухомому аксоїду;
в) три окремі положення миттєвої осі обертання тригранника в його системі, які належать рухомому аксоїду

На рис. 2,б показано криву у її площині таким чином, що бінормаль тригранника і миттєва вісь його обертання проекціюються в точку. Цифрами 1, 2, 3 позначено окремі положення миттєвої осі обертання тригранника при його русі по кривій. Множина таких осей утворить циліндричну поверхню – нерухомий аксоїд. Ортогональним перерізом такого циліндра є крива – геометричне місце центрів кривини напрямної кривої, тобто еволюта. Таким чином, нерухомим аксоїдом тригранника плоскої кривої є еволютний циліндр.

На рис. 2,в ці ж самі миттєві осі обертання тригранника зображені у його системі. Їх множина утворює рухомий аксоїд. Приріст відстані ρ вздовж головної нормалі тригранника дорівнює приросту відповідних дуг еволюти в силу її властивостей, тобто довжини дуг між точками 1, 2, 3 рівні відповідним відрізкам головної нормалі. Таким чином, рухомим аксоїдом тригранника є площина – розгортка нерухомого аксоїда. Сам нерухомий аксоїд є обвідною поверхнею однопараметричної множини нормальних площин напрямної кривої, тобто є для неї полярним торсом. Звідси сформулюємо наступне..

Твердження. При русі супровідного тригранника Френе по плоскій напрямній кривій його нерухомим аксоїдом є полярний торс кривої, а рухомим – розгортка полярного торса.

Якщо розгортку (рухомий аксоїд) із тригранником Френе (рис. 2,в) сумістить із полярним торсом, яким є еволютний циліндр так, щоб відповідні прямолінійні твірні, тобто осі, збігалися, то при обкочуванні розгортки по полярному торсі вершина тригранника відтворить вихідну криву.

Для прикладу за напрямну криву ми взяли евольвенту кола. Її еволютним циліндром (нерухомим аксоїдом) є коловий циліндр. На рис. 3 показано два положення тригранника при його русі по напрямній кривій. Рухомий аксоїд (фрагмент площини - розгортки нерухомого аксоїда, тобто циліндра) обкочується по циліндру без ковзання, віддаляючись при цьому від його осі. Вершина тригранника описує при цьому вихідну криву. Якщо взяти в нормальній площині тригранника, тобто на рухомому аксоїді іншу точку, відмінну від його вершини, то її траєкторією теж буде евольвента кола того ж самого радіуса, але зі зміщенням по довжині дуги.

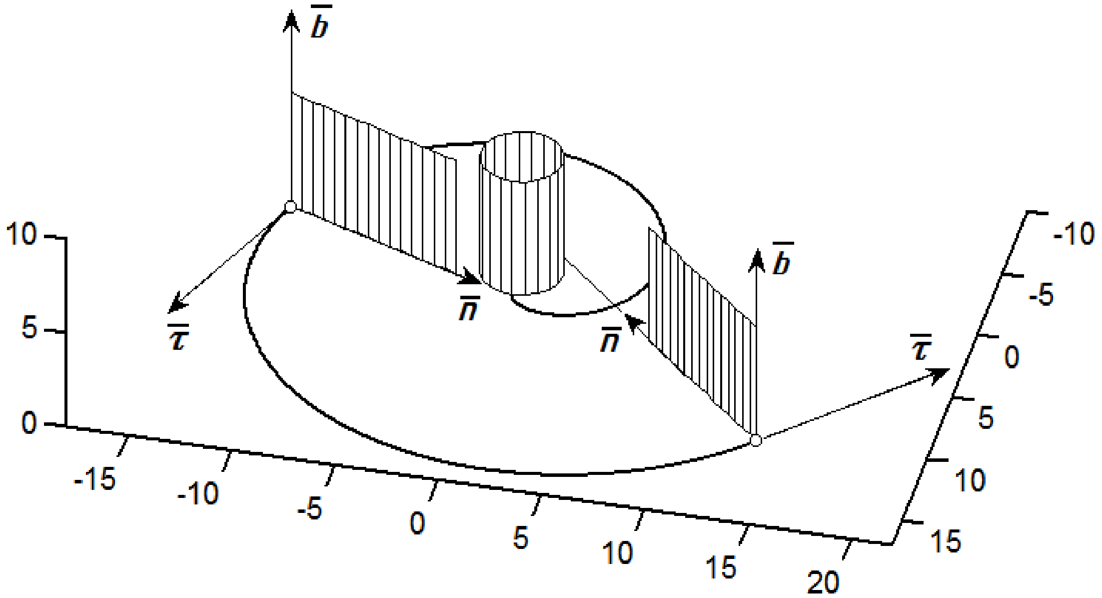


Рис. 3. Обкочування рухомого аксоїда по нерухомому на прикладі плоскої напрямної кривої – евольвенти кола

Оскільки твірні обох аксоїдів мають вертикальний напрям, то задачу можна звести до плоскої: перекочування прямої по кривій. Пряма і крива в такому випадку називаються рухомою і нерухомою центроїдами. Таке перекочування показано на рис. 4. Відтворити рух плоскої фігури у площині можна перекочуванням її рухомої центроїди по нерухомій.

Якщо у площині рухомого аксоїда помістити будь-яку криву, то при його перекочуванні по нерухомому аксоїді буде утворена ротативна поверхня. Якщо замість кривої взяти пряму лінію, то утвориться розгортна поверхня.

Візьмемо за вихідну напрямну криву коло. Оскільки для нього ρ=*const*, то нерухомий і рухомий аксоїди вироджуються в пряму лінію.

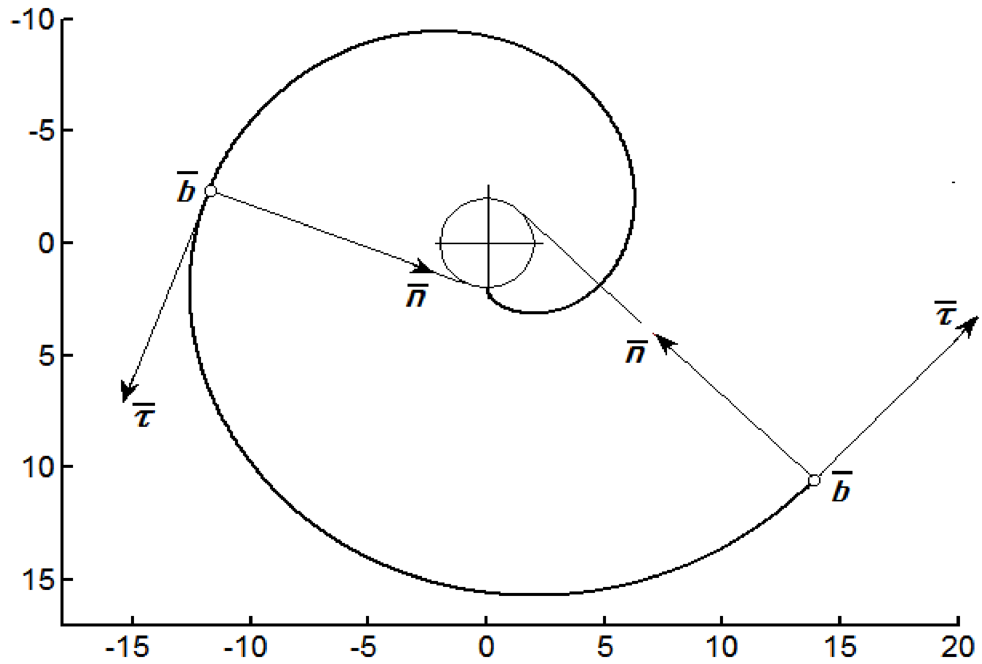


Рис. 4. Утворення кривої шляхом перекочування прямої (ортогонального перерізу рухомого аксоїда) по колу (ортогональному перерізу нерухомого аксоїда

Обкочування рухомого аксоїда по нерухомому перетворюється в обертання площини (рухомого аксоїда) навколо прямої (нерухомого аксоїда). Точка в площині рухомого аксоїда на відстані радіуса ρ від осі обертання опише коло, тобто відтворить вихідну криву. Якщо в площині взяти пряму лінію, то утвореною ротативною поверхнею буде циліндр або конус.

Висновки. Для окремого випадку руху тригранника Френе, коли напрямною лінією є плоска крива, нерухомим аксоїдом є полярний торс кривої, а рухомим – його розгортка. Обкочуванням розгортки по полярному торсу можна відтворити вихідну криву. Цією кривою буде траєкторія точки, розташованої в площині розгортки. Якщо в площині помістити криву або пряму лінію, то траєкторією буде ротативна поверхня (криволінійна або розгортна).

Література

1. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье . В двух томах – Т. 1: Статика и кинематика. – 8-е изд. – М.: Наука, 1982. – 352 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: ФМ, 1961. – 823 с.
3. Ядгаров Д.Я. Применение дифференциальных уравнений к конструированию ротативных поверхностей с аксоидами торс-торс / Д.Я. Ядгаров, И.Х. Шоломов // Исслед. в области теории

дифференциальных уравнений и теории приближений. – Ташкент, 1982. – С. 96 – 100.
4. Кирилов С.В. Параметрические уравнения некоторых спироидальных поверхностей / С.В. Кирилов // Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей: Труды МАИ. – Вып. 296. – М.: МАИ, 1972. – С. 81 – 85.
5. Кривошапко С.Н. Исследование и визуализация ротативных и спироидальных поверхностей / С.Н. Кривошапко, С.Л. Шамбина // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Том 49. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – С. 33 – 41.
6. Панчук К.Л. Элементы кинематической геометрии кривой линии / К.Л. Панчук // Омский научный вестник. – Омск: ОГТУ, 2005. – № 2 (31). – С. 68 – 69.

НЕПОДВИЖНЫЙ И ПОДВИЖНЫЙ АКСОИДЫ СОПРОВОЖДАЮЩЕГО ТРЁХГРАННИКА ФРЕНЕ ПЛОСКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ

Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Кремец Я.С.

Движение сопровождающего трехгранника Френе по направляющей кривой можно рассматривать, как движение твердого тела, закономерность которого определено дифференциальными характеристиками кривой. Поскольку трехгранник движется вдоль кривой, то его перемещение можно рассматривать, как сумму двух составляющих движений: поступательного вдоль орта касательной и вращательного вокруг мгновенной оси вращения. Эти два движения можно свести к винтовому движению вокруг мгновенной оси вращения и скольжения. Однопараметрическое множество таких осей по отношению к неподвижной системе координат образует неподвижный аксоид, а по отношению к системе подвижного трехгранника – подвижный.

В статье рассмотрено построение подвижного и неподвижного аксоидов для случая, когда направляющей кривой трехгранника является плоская кривая. В таком случае скольжение отсутствует. Мгновенная ось вращения трехгранника параллельна орту бинормали и пересекает орт главной нормали на определенном расстоянии от бинормали. Это расстояние численно равно радиусу кривизны кривой в текущей точке расположения трехгранника. При движении трехгранника по кривой с переменной кривизной *мгновенная ось вращения движется вдоль орта главной нормали, оставаясь параллельной орту бинормали. Множество положений оси мгновенного вращения в системе трехгранника образует подвижный аксоид, которым является плоскость. Неподвижным аксоидом является цилиндр, поперечным сечением которого является эволюта плоской направляющей кривой. Показано, что подвижный аксоид является разверткой неподвижного. Неподвижный аксоид является полярным торсом направляющей кривой. Сформулировано соответствующее утверждение.*

Рассмотрено конкретные примеры, когда за исходную направляющую кривую взято эвольвенту окружности и окружность. Для окружности кривизна является постоянной, поэтому ось мгновенного вращения в трехграннике не движется. Подвижный аксоид вырождается в прямую линию. Полярный торс для окружности тоже вырождается в прямую линию, которая проходит через его центр. Перекачиванием подвижного аксоида по неподвижному можно воссоздать направляющую кривую. Для окружности это будет вращение прямой линии (подвижного аксоида) вокруг другой прямой (неподвижного аксоида). Расстояние между ними равно радиусу кривизны, то есть радиусу окружности. Точка на подвижном аксоиде при его вращении вокруг неподвижного опишет окружность.

Ключевые слова: сопровождающий трёхгранник Френе, направляющая кривая, неподвижный й аксоид, подвижный аксоид.

IMMOVABLE AND MOVABLE AXOID OF ACCOMPANYING TREE-EDGE OF FRENET OF FLAT SENDING CURVE

Kresan T., Pylypaka S., Kremetz Ya.

The movement of the accompanying three-edge of Frenet along the guide curve can be considered as a solid body motion, the regularity of which is determined by the differential characteristics of the curve. Since the three-edge moves along the curve, its movement can be considered as the sum of two constituent motions: translational along the ort of the tangent and rotational around the instantaneous axis of rotation. These two movements can be reduced to the screw motion around the instantaneous axis of rotation and sliding. The one-parameter plural of such axes forms *an immovable axoid with respect to the fixed coordinate system, and a movable axoid with respect to the moving three-edge system.*

The article describes the construction of movable and immovable axoids for the case when the guide curve of the trihedron is a flat curve. In this case, there is no slip. The instantaneous axis of rotation of the trihedron is parallel to the ort of the binormal and intersects the ort of the principal normal at a certain distance from the binormal. This distance is numerically equal to the radius of curvature of the curve at the current point of the trihedron. When the trihedron moves along the curve with a variable curvature, the instantaneous axis of rotation moves along the ort of the principal normal, while remaining parallel to the ort of the binormal. The plural of positions of the instantaneous rotation axis in the trihedron system forms a movable axoid, which is the plane. The immovable axoid is a cylinder, the cross section of which is an evolute of a flat guide curve. It is shown that the movable axoid is an involute of the immovable. The immovable axoid is the polar torso of the guide curve. The corresponding statement is formulated.

Specific examples are considered when the circle and evolvent of the circle are taken for the initial sending curve. For a circle, the curvature is constant, so the axis of instantaneous rotation in the trihedron does not move. Movable axoid degenerates into a straight line. The polar torso for a circle also degenerates into a straight line that passes through its center. By pumping the movable axoid on the immovable one, it is possible to recreate a guide curve. For a circle, this will be the rotation of a straight line (movable axoid) around another straight line (immovable axoid). The distance between them is equal to the radius of curvature, that is, the radius of the circle. The point on the movable axoid when it rotates around the immovable one will describe the circle.

Keywords: the accompanying three-edge of Frenet, the sending curve, immovable acsoid, movable acsoid.