

ДЕМПФИРОВАНИЕ В ТРЕХСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ БАЛКАХ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ

И.Б. Бутитер, Б.М. Дивеев, И.С. Когут, М.М. Николишин
Національний університет «Львівська Політехніка»

Представлена теория изгиба слоистого пакета. Теоретическая модель учитывает сдвиговые, нормальные деформации и напряжения. Детально рассматривается распределение напряжений в трехслойной балке при разных частотах колебаний. Проводится оценка демпфирующих свойств в частотной области. Представлены экспериментальные результаты для стальной балки с мягкими лицевыми слоями.

Ключевые слова: трехслойная балка, композит, изгиб, колебания, демпфирование, частота.

Введение. Слоистые композитные тонкостенные элементы находят все большее применение в конструкциях современных объектов. По сравнению с изотропными металлическими однослойными пластинами, оболочками они владеют более сложными свойствами, которые позволяют эффективнее их использовать. Важным является прогнозирование динамических характеристик такого рода элементов, в частности величины рассеяния энергии – демпфирования.

На данное время продолжают интенсивно разрабатываться разнообразные подходы к моделированию такого рода конструкций. Сравнительный анализ теорий слоистых элементов при разных условиях нагружения приведен в работах [1,2]. Для исследования динамики тонкостенных элементов применяются теории все более высокого порядка [2–7]. Важной задачей является определение демпфирующих свойств элементов конструкций, в частности тонкостенных слоистых элементов. Это связано со все более частым применением такого рода элементов в аэрокосмической технике, машиностроении, строительстве. Обзор работ по определению демпфирующих свойств тонкостенных элементов типа сэндвич приведен в [8]. В данной работе используется адаптивный алгоритм на основе обобщенных кинематических аппроксимаций и классического метода Галеркина для системы уравнений линейной теории упругости [9–14]. Рассмотрены схемы упруго зажатой слоистой балки-консоли и свободно опертой балки.

Постановка задачи. Рассмотрим следующие кинематические аппроксимации ($U = U_e \cup U_d$) для симметричной трехслойной балки длины L и толщины $2H_p$ (рис. 1) при трехточечном изгибе [10]:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i,k} u_{ik}^e z^{2i-1} \phi_k(x), & u &= \sum_{i,k} u_{ik}^d (z-H)^i \phi_k(x), \\
 w &= \sum_{i,k} w_{ik}^e z^{2i-2} \psi_k(x), & w &= \sum_{i,k} w_{ik}^d (z-H)^i \gamma_k(x), \\
 U_e &\begin{cases} 0 < z < H, \\ 0 < x < L, \end{cases} & U_d &\begin{cases} H < z < H_p, \\ 0 < x < L \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1}$$

где u, w – тангенциальные и нормальные перемещения слоев соответственно; $u_{ik}^e, w_{ik}^e, u_{ik}^d, w_{ik}^d$ – неизвестные величины; $\phi_k(x)$ и $\gamma_k(x)$ – известные координатные функции, зависящие от граничных условий на краях балки.

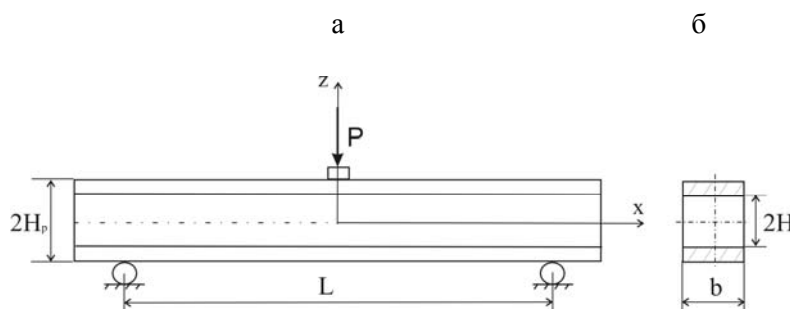


Рис. 1. Схема нагружения (а) и сечение трехслойной балки (б)

Предполагаем, что материал слоев балки анизотропный с коэффициентами жесткости C_{xx} , C_{xz} , C_{zz} и G_{xz} , которые соответствуют закону Гука

$$\sigma_{xx} = C_{xx} \varepsilon_{xx} + C_{xz} \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{zz} = C_{xz} \varepsilon_{xx} + C_{zz} \varepsilon_{zz}, \quad \tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}. \quad (2)$$

В случае плоского изгиба коэффициенты жесткости материала слоев можно выразить через технические константы

$$C_{xx} = \frac{E_1}{1 - \nu^2 E_2/E_1}, \quad C_{zz} = \frac{E_2}{1 - \nu^2 E_2/E_1}, \quad C_{xz} = \frac{\nu E_1}{1 - \nu^2 E_2/E_1}, \quad G_{xz} = G$$

Подставив кинематические аппроксимаций (1) и соотношения (2) в вариационное уравнение Гамильтона-Остроградского

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} - \rho \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} - \rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t}) dV + \int_{S_K} kU \delta U dS - \int_{S_P} P \delta U dS \right) dt = 0, \quad (3)$$

и при этом используя метод Галеркина для установившихся колебаний

$$u_{ik}^e = \bar{u}_{ik}^e e^{i\omega t}, \quad w_{ik}^e = \bar{w}_{ik}^e e^{i\omega t}, \quad u_{ik}^d = \bar{u}_{ik}^d e^{i\omega t}, \quad w_{ik}^d = \bar{w}_{ik}^d e^{i\omega t}$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения амплитуд [11]

$$-\omega^2 [M] \bar{U} + i\omega [C] \bar{U} + [K] \bar{U} = \bar{P}. \quad (4)$$

Здесь V – объем балки; S_K – поверхность упругого закрепления; S_P – поверхность с известными усилиями; $[A]$ – блочная матрица жесткости, определяемая двойным интегрированием по толщине и длине балки; \bar{U} , \bar{P} – вектора амплитуд перемещений и нагрузки; $[M]$ – матрица масс; $[C]$ – матрица вязкоупругого демпфирования; $[K]$ – матрица жесткости; $[t_1, t_2]$ – временной интервал; ω – круговая частота колебаний. Верхний индекс T обозначает транспонирование.

Для большего числа слоев балки аналогично (1) кинематические аппроксимации можно представить в следующем виде

$$u = \sum_{i,k} u_{ik}^{(n)} (z - H^{(n-1)})^i \phi_k(x),$$

$$w = \sum_{i,k} w_{ik}^{(n)} (z - H^{(n-1)})^i \gamma_k(x), \quad (5)$$

$$U_d^{(n)} = \begin{cases} H^{(n-1)} < z < H^{(n)}, \\ 0 < x < L, \\ n = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Здесь $H^{(n)} - H^{(n-1)} = H_n$, $H^{(0)} = 0$, $H^{(1)} = H_1 = H$, $H^{(N)} = H_N$. Заметим, что значения $N=1$, $N=2$ и $N=3$ соответствуют случаям одно-, трех- и пятислойной балок симметричной конструкции соответственно.

В рамках расчетной модели (1)–(5) рассмотрим влияние демпфирующей прослойки на демпфирование в пакете (рис.1). Используем для этого матрицу жесткости K решающей системы уравнений (4). Суммарное демпфирование будет

$$\eta = \frac{\eta_1 [q_1]^T [K_1] [q_1] + \eta_2 [q_2]^T [K_2] [q_2] + \dots + \eta_N [q_N]^T [K_N] [q_N]}{[q]^T [K] [q]}. \quad (6)$$

Здесь $[K_i]$ – компоненты матрицы жесткости i -й прослойки, η_i – демпфирование в i -й прослойке, $[q]$ – вектор решения, T – индекс транспонирования. Считаем, обычно, что матрица демпфирования пропорциональна матрице жесткости $C_i = \eta_i [K_i]$.

Численные примеры. На рис. 2 (верхние кривые) показано отношение демпфирования D_F в сэндвиче в целом к демпфированию D_S в его мягких слоях для свободно опертой центрально нагруженной симметричной трехслойной балки с мягким демпфирующим ядром. Демпфированием в лицевых слоях пренебрегаем ($\eta_i = 0, i \neq 1$). Были использованы различного порядка аппроксимации по толщине каждого слоя. Продольные координатные функции задавались в виде $\phi_k(x) = \sin((2k-1)\pi x/2L)$, $\gamma_k(x) = \cos((2k-1)\pi x/2L)$ для сэндвича со следующими геометрическими и механическими параметрами: длина балки $L = 0.2$ м, толщина ядра $H = 0.030$ м; модули упругости и плотность ядра $C_{xx} = 180$ МПа, $C_{zz} = 150$ МПа, $G = 40$ МПа, $C_{xz} = 75$ МПа ($\nu = 0.3$), плотность $\rho = 2400$ кг/м³; толщины лицевых слоев $H_p = H = 0.002$ м, модули упругости и плотность лицевых слоев $C_{xx} = 5400$ МПа, $C_{zz} = 750$ МПа, $G = 200$ МПа, $C_{xz} = 375$ МПа, $\rho = 240$ кг/м³. На рис. 2 (нижние кривые) приведены также соответствующие амплитудно-частотные характеристики (АЧХ). Показано влияние порядка аппроксимации (количества членов разложения (1) по нормали) на решение. Как видно из рис. 2а, для точного решения достаточно ограничиться четырьмя членами аппроксимации в нормальном направлении.

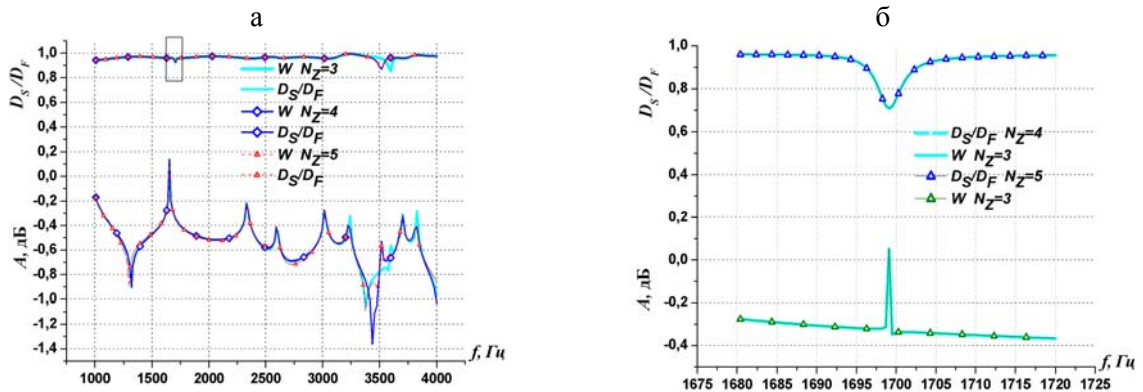


Рис. 2. АЧХ и относительное демпфирование (D_S/D_F) симметричной трехслойной балки с мягким ядром: (а) – в широком частотном диапазоне; (б) – в области флуктуаций.

На рис. 3 показаны эти же величины для балки с мягкими демпфирующими лицевыми слоями ($\eta_i = 0, i = 1$). Здесь толщина ядра $H = 0.008$ м, толщина лицевых слоев $H = 0.016$ м. Механические характеристики слоев принимались такими же, как и выше для сэндвича.

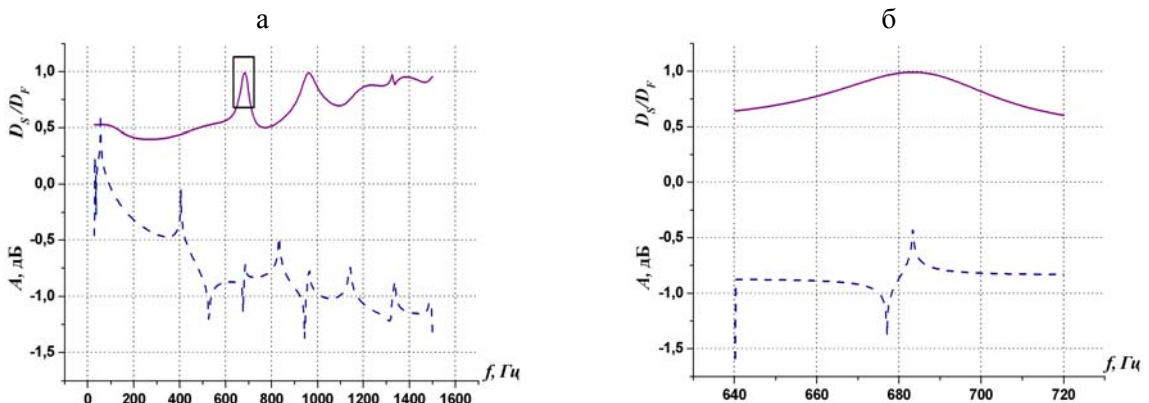


Рис. 3. АЧХ и относительное демпфирование (D_S/D_F) симметричной трехслойной балки с мягкими внешними слоями: (а) – в широком частотном диапазоне; (б) – в области флуктуаций

На рис. 2,3 можно заметить значительные флуктуации демпфирования (обведенные прямоугольником). В первом случае резкое падение, во втором – значительный рост. Это объясняется изменением распределения напряжений по толщине пакета для разных частот.

Проиллюстрируем это на примере симметричной трехслойной балки с мягкими демпфирующими лицевыми слоями (рис. 4,5).

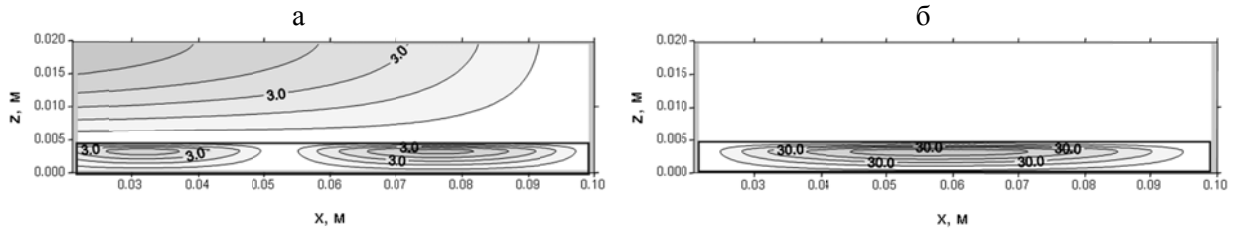


Рис. 4. Распределение продольных напряжений σ_x по половине толщины балки в частотной области: (а) – аномальная зона ($f = 685$ Гц); (б) – зона малого демпфирования ($f = 250$ Гц).

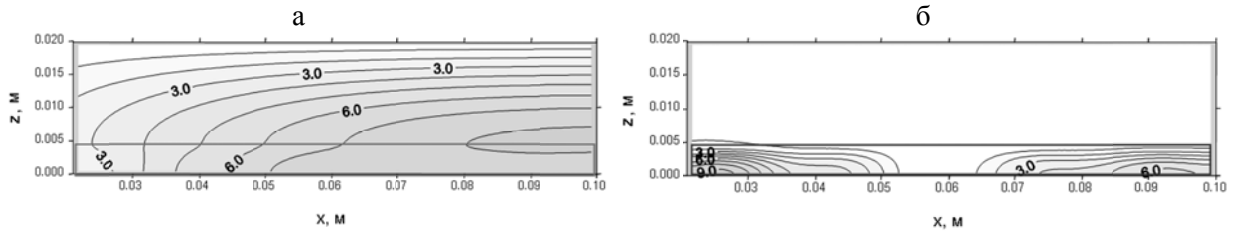


Рис. 5. Распределение сдвиговых напряжений τ по половине толщины балки в частотной области: (а) – аномальная зона ($f = 685$ Гц); (б) – зона малого демпфирования ($f = 250$ Гц)

Можно заметить, что напряжения в демпфирующих слоях значительно больше в области частот $f = 685$ Гц (рис. 4а, 5а). Это и приводит к повышенному демпфированию.

В первом случае наблюдаются значительные напряжения во внутреннем слое и, наоборот, во втором случае эти напряжения минимальны. В заключении этого раздела рассмотрим влияние толщины жестких лицевых слоев на демпфирование (рис. 6).

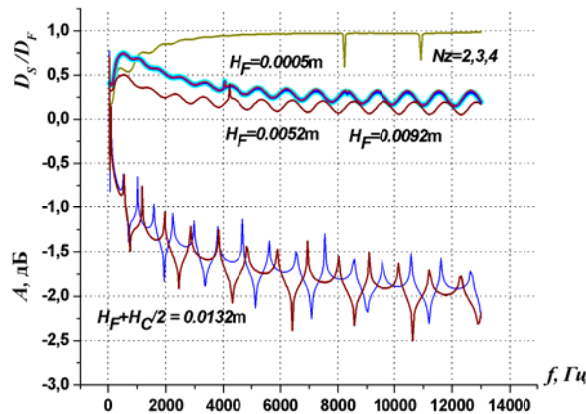


Рис. 6. АЧХ и относительное демпфирование (D_s/D_f) симметричной трехслойной балки для разных толщин H_F жестких лицевых слоев

Здесь рассматривалась тот же сэндвич, что и выше, но с переменной толщиной лицевых слоев H_F (толщина балки постоянна). Здесь с увеличением толщины жестких слоев флуктуации становятся периодическими и соответствуют АЧХ. Для толщины лицевых слоев $H_F = 0.052$ м приведены величины относительного демпфирования для разных аппроксимаций. Как и ранее, можно заметить, что уже при $N_z \geq 2$ результаты практически идентичны во всей частотной области.

Экспериментальные исследования. Экспериментально исследовали жесткость K и коэффициент демпфирования C стальных пластинчатых образцов и образцов с резиново-битумным покрытием (рис. 7) фазовым методом [15] при кинематическом возбуждении поперечных колебаний балочного образца.

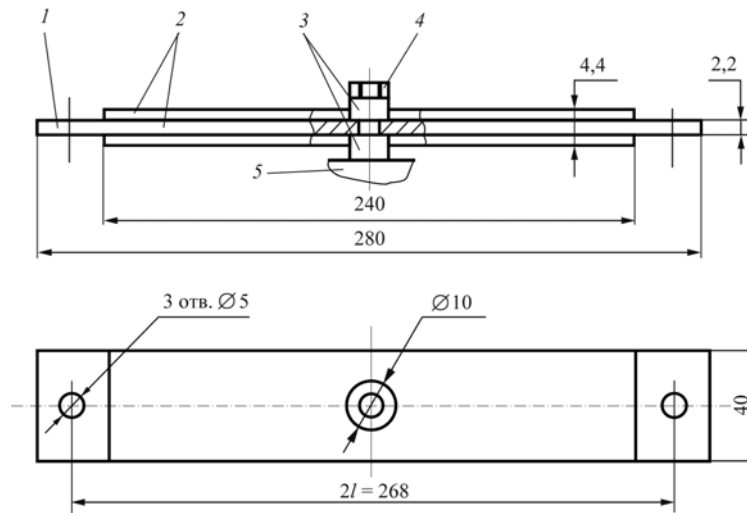


Рис. 7. Схема установления образца на столе вибратора:
 1 – пластинка стальная; 2 – слой резиново-битумный; 3 – шайба стальная; 4 – болт М5х20; 5 – стол вибратора электродинамического ВЕДС–10А

Метод основан на измерении амплитуд a и a_0 – соответственно свободного и заземленного концов консольной балки, а также угла сдвига фаз между их перемещениями. Пластинчатые образцы вырезали из листовой стали Ст.3 ГОСТ 380-71 вдоль прокатки; чистота необработанных поверхностей и термообработка образцов в состоянии поставки; резиново-битумные слои приклеены. Биконсольные образцы закрепляли на столе электродинамического вибратора симметрично относительно его вертикальной оси с помощью болта и шайб. На концах образца устанавливали инерционные грузы (масса m_1 груза вместе с модулирующей диафрагмой, болтом и гайкой равна 33г).

Образцы испытывали в области основного резонанса, когда сдвиг фаз между перемещениями составлял 90° . Амплитуду свободного конца образца измеряли и контролировали бесконтактным методом с помощью модулирующей диафрагмы и координатного фотоприемника (КФП) [15]. Расчетные величины вычисляли по формулам

$$K = m\omega^2 \frac{a/a_0}{a_0/a + a/a_0}, \quad C = m\omega \frac{1}{a_0/a + a/a_0},$$

где $m = m_1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{m_2}{2}$ – приведенная масса эквивалентного образцу осциллятора; $m_2 = 192,39$ и $237,50$ г – масса стальной пластинки и образца с покрытием соответственно; $\omega = 2\pi f$; f – резонансная частота.

Рассеяние энергии $\Delta \mathcal{E}$ за счет конструкционного демпфирования в зажиме оценивали по площади упрощенной петли гистерезиса (рис. 8а), снятой при трехточечном статическом изгибе стальной пластинки с шайбами, прижатыми болтом (рис. 8б).

Эквивалентный коэффициент демпфирования C_1 определяли из равенства рассеяния энергии $\Delta \mathcal{E}$ эквивалентному вязкому сопротивлению и рассчитывали по формуле

$$C_1 = \Delta \mathcal{E} / \pi a^2 \omega$$

где $\Delta \mathcal{E} = 0,228 \cdot 10^{-3}$ [н·м] – площадь петли гистерезиса.

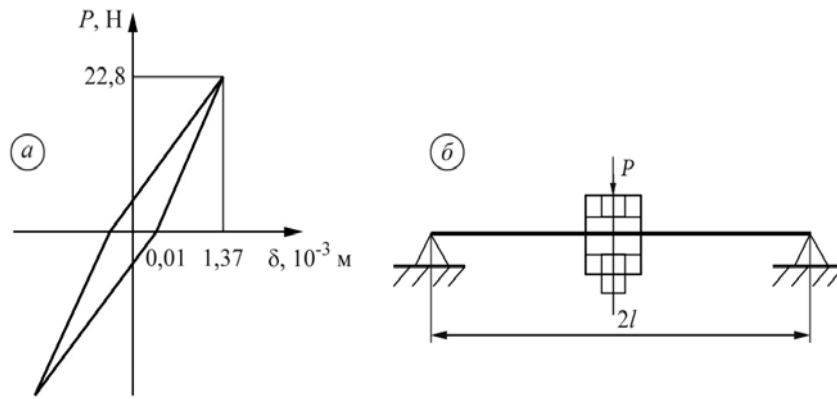


Рис. 8. Петля гистерезиса (а) и схема изгиба пластинки с прижатыми шайбами (б)

В таблице 1 приведены средние значения измеренных величин и рассчитанных характеристик за результатами испытаний трех образцов.

Таблица 1.

Значения измеренных и рассчитанных характеристик образцов

Образцы	$f, \text{с}^{-1}$	$a \cdot 10^{-3}, \text{м}$	$a_0 \cdot 10^{-3}, \text{м}$	$C, \text{н} \cdot \text{с} / \text{м}$	$K, \text{н} / \text{м}$	$C_1, \text{н} \cdot \text{с} / \text{м}$
стальные	60,1	1,368	0,027	0,4147	7934,34	0,1058
с покрытием	58,4	1,368	0,050	0,8170	8202,20	0,1058

Как видно из таблицы, покрытие повышает демпфирование образцов в 2 раза.

На основании вышеприведенных соотношений (1)–(6) уточненной теории изгиба слоистых пластин исследовались динамические характеристики пластины. Для определения демпфирования в покрытии вначале определялся его модуль Юнга. На рис. 9 приведены АЧХ в области резонанса стальной балки и балки с покрытием разной толщины.

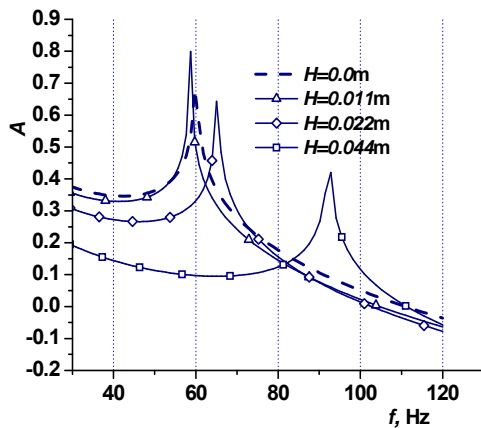


Рис. 9 АЧХ в области резонанса стальной балки и балки с покрытием

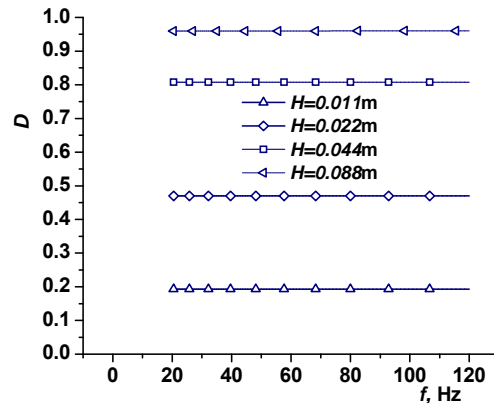


Рис. 10. Относительное демпфирование балки с покрытием

На рис. 10 приведены относительное демпфирование и АЧХ балки с покрытием с найденным ранее модулем Юнга. Здесь приведены различные толщины покрытия H (при отсутствии покрытия АЧХ балки обозначена пунктирной линией без символов). Можно заметить, что если АЧХ этих балок довольно близки, то демпфирование (рис. 11) значительно возрастает с изменением толщины покрытия. Практически, при восьмикратной толщине покрытия относительное демпфирование составляет 100%. Если не учитывать демпфирование в защемлении балки, то можно определить на основании рис. 11 демпфирование в материале покрытия. Если изготовить образцы с достаточным количеством толщин покрытия, то можно не только более точно определить демпфирование в материале покрытия, но и определить демпфирование в защемлении. Это демпфирование можно элиминировать при другой схеме эксперимента: балка подвешенная на струнах.

Выводы. Для определения демпфирования в слоистых структурах типа сэндвич предложенные «унифицированы» расчетные схемы, в которых порядок уравнений не ограничен (рассматривается произвольное число аппроксимаций по толщине пластины). На основании уточненных расчетных схем определено влияние анизотропии свойств трехслойной балки на ее частотный спектр и демпфирование. Обнаружены флуктуации динамических характеристик пакетов в узких частотных диапазонах, связанных с пространственным распределением напряжений. Экспериментально исследовано демпфирование в балке с тонкими демпфирующими накладками.

1. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // *Appl. Mech. Rev.* – 2003. – Vol. 56. – P. 287–308.
2. Hu Heng Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites / Heng Hu, Salim Belouettar, Michel Potier-Ferry, El Mostafa Daya // *Composite Structures.* – 2008. – Vol. 84. – P. 282–292.
3. Frostig Y. High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core / Y. Frostig, O. T. Thomsen // *Journal of Solids and Structures.* – 2004. – 41. – P. 1697–1724.
4. Wu Zhen Effects of higher-order global-local shear deformations on bending, vibration and buckling of multilayered plates / Zhen Wu, Cheung YK, Lo SH, Wanji Chen // *Composite Structures.* – 2007. – 20. – doi:10.1016/j.compstruct.2007.01.017.
5. Woodcock Roland L. Free vibration of advanced anisotropic multilayered composites with arbitrary boundary conditions / Roland L. Woodcock // *Journal of Sound and Vibration.* – 2008. – 312. – P. 769–788.
6. Kim J.-S. Free vibration of laminated and sandwich plates using enhanced plate theories / J.-S. Kim // *Journal of Sound and Vibration.* – 2007. – 308. – P. 268–286.
7. Lu C. F. Semi-analytical three-dimensional elasticity solutions for generally laminated composite plates / C. F. Lu, W. Q. Chena // *European Journal of Mechanics A/Solids.* – 2008. – 27. – P. 899–917.
8. Li Z. A review of vibration damping in sandwich composite structures / Z. Li, M. J. Crocker // *International Journal of Acoustics and Vibration.* – 2005. – 10. – P. 159–169.
9. Дивеев Б. Динамічні властивості шаруватих структур / Б. Дивеев, А. Смольський // *Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. Український міжвідомчий науково-технічний збірник.* – Львів, Вид-во “Львівська політехніка”, 2008. – № 42. – С. 70–79.
10. Diveyev V. High order theories for elastic modules identification of composite plates. Part 1. Theoretical approach / V. Diveyev, I. Butyter, N. Shcherbyna // *Mechanics of Composite Materials.* – Vol.44, No.1. – 2008. – P. 25–36.
11. Diveyev V. High order theories for elastic modules identification of composite plates. Part 2. Theoretical-experimental approach / V. Diveyev, I. Butyter, N. Shcherbyna // *Mechanics of Composite Materials.* – Vol.44, No.2. – 2008. – P. 139–144.
12. Бутитер І. Б. Визначення механічних характеристик шаруватих елементів / І. Б. Бутитер, Б. М. Дивеев, І. С. Когут, А. Г. Смольський // *Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. Український міжвідомчий науково-технічний збірник.* – Львів, Вид-во “Львівська політехніка”, 2011. – № 45. – С. 21–27.
13. Дивеев Б. Влияние условий защемления и анизотропии материала на частотный спектр слоистых балок / Б. Дивеев, И. Бутитер, Н. Щербина // *Механика композитных материалов.* – Т. 47, №2. – 2011. – С. 217–234.
14. Diveyev V. M. Refined numerical schemes for a stressed-strained state of structural joints of layered elements / V. M. Diveyev, M. M. Nykolyshyn // *Journal of Mathematical Sciences.* 107 (2001), P. 3666–3670.
15. Когут І. С. Міцність і демпфування стрижневих конструкцій із армованих полімерів / І. С. Когут– Львів: НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, 2011. – 198 с.

Бутитер І.Б., Дивеев Б.М., Когут І.С., Николишин М.М. Демпфування в тришарових композитних балках при динамічному згині. Представлена теорія згину шаруватого пакета. Теоретична модель враховує зсувні, нормальні деформації і напруження. Детально розглядається розподіл напружень в тришаровій балці при різних частотах коливань. Проводиться оцінка демпфуючих властивостей в частотній області. Представлені експериментальні результати для сталеві балки з м'якими лицьовими шарами.

Ключові слова: трьохшарова балка, композит, згин, коливання, демпфування, частота..

I. Butyter, V. Diveyev, I. Kohut, M. Nykolyshyn. Damping in the three-layered composite beams under dynamic bending. The theory of the layered package bending is presented. A theoretical model takes account of the shear and normal strains and stresses. A detailed stress distribution in the three-layer beams by different vibration frequencies is under discussion. Damping properties in the frequency region are appreciated. The experimental results for steel beam with the soft face sheets are presented.

Keywords: three-layer beam, composite, bending, vibration, damping, frequency.

Стаття надійшла в редакцію 25.04.2014р.