

Плоский В.О., Скочко В.І.

*Київський Національний Університет Будівництва і Архітектури***ПОБУДОВА ДИСКРЕТНИХ КАРКАСІВ ПОВЕРХОНЬ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ РІВНЯНЬ ПАРАМЕТРІВ СТАНУ ТА ПОЛОЖЕННЯ В'ЯЗЕЙ СІТЧАСТИХ СТРУКТУР**

В роботі продемонстровано принцип застосування математичного алгоритму системного управління параметрами зв'язків між вузлами сітчастих структур, що передбачає використання рівнянь параметрів стану та положення їхніх в'язей, на прикладі побудови фрагменту дискретного каркасу поверхні.

Ключові слова:

Постановка проблеми. Одним із найбільш розповсюджених напрямків моделювання геометричних образів є дискретне геометричне моделювання. На сьогоднішній день широкого застосування набули математичні моделі сітчастих структур, що інтерпретують поведінку ідеалізованих механічних систем стрижневого або вантового типів під дією зовнішніх навантажень. Стан таких структур повністю описується рівняннями стану статичної рівноваги їх вузлів. Результуюча (бажана) форма модельованого геометричного об'єкту може бути одержана шляхом підбору таких вузлових зовнішніх навантажень та жорсткісних параметрів в'язей моделі, що максимально задовільняють вимогам до цієї форми. Найчастіше в якості параметрів варіювання використовуються лише зовнішні навантаження, а однією з причин цьому слугує відсутність єдиного підходу до підбору шуканих параметрів в'язей моделі.

Один із способів вирішення зазначеної проблеми можна продемонструвати на прикладі побудови дискретного каркасу поверхні, заданої відомою функцією. Дана задача є актуальною та важливою, оскільки відноситься до питань візуалізації геометричних об'єктів у середовищі програм комп'ютерної математики.

Формулювання цілей та завдання публікації. Метою даної роботи є практична демонстрація можливості досягнення бажаної форми дискретно представлені поверхні шляхом комплексного системного управління параметрами її в'язей в просторі.

Аналіз основних досліджень. Для вирішення поставленої мети скористаємося математичним алгоритмом управління формою моделі сітчастої структури, викладеної у праці [3]. Даний алгоритм передбачає поетапне системне коригування параметрів жорсткості в'язей досліджуваної сітчастої структури (дискретного образу), всі вільні вузли якої перебувають під дією векторного поля зовнішнього впливу \mathfrak{Z} , шляхом поступової заміни поточних величин скалярного потенціалу φ даного поля у вузлах моделі на бажані (заздалегідь встановлені) величини.

Загалом вище згаданий алгоритм можна звести до послідовного повторення ітераційних циклів, кожен із яких здійснюється до моменту досягнення встановлених похибок числення та в матричній формі має наступний вигляд:

$$\begin{cases} [s^p] = [\mathfrak{K}^{p-1}]^{-1} \cdot (-[g^{p-1}] - [\mathfrak{Z}^p]), \\ \{\mathfrak{K}^p\} = [(\delta^p)^2]^{-1} \cdot (\{\varphi^{p-1}\} - \{\varphi^p\} + [(\delta^p)^2] \cdot \{\mathfrak{K}^{p-1}\}). \end{cases} \quad (1)$$

Тут: $[s]$, $[g]$ та $[\mathfrak{Z}]$ – матриці координат, крайових умов та зовнішніх впливів відповідно (розмірністю $k \times 3$); $[\mathfrak{K}]$ – матриця параметрів жорсткості стрижневої структури (розмірністю $k \times k$), що характеризує топологію останньої; k – кількість вільних вузлів моделі. $\{\mathfrak{K}\}$ – вектор-стовпець параметрів жорсткості сітчастої структури, який містить параметри жорсткості всіх в'язей моделі; $\{\varphi\}$ та $\{\varphi'\}$ – вектор-стовпці реальних та бажаних (відповідно) показників вузлових скалярних потенціалів; $\{B\}$ – вектор-стовпець операційних констант, які є наслідками побудови параметричних рівнянь стану в'язей моделі; $[\delta^2]$ – матриця геометричних параметрів стрижневої

структури (розмірністю $h \times h$); p – індекс, що відповідає порядковому номеру циклу корегування моделі.

Перша тотожність представляє собою розв'язання нелінійної в загальному випадку системи рівнянь рівноваги вузлів моделі сітчастої структури під дією поля $\bar{\mathfrak{S}}$ шляхом внутрішнього (проміжного) ітераційного числення. Друга тотожність – це розв'язання системи параметричних рівнянь стану в'язей моделі відносно параметрів жорсткості із урахуванням корегування величин потенціалів на поточному p -му кроці формування дискретного образу.

Рівняння рівноваги деякого i -го вузла сітчастої структури, що сполучається з n іншими вільними вузлами має вигляд:

$$\sum_{j=1}^n (s_j - s_i) \cdot \mathfrak{K}_{i,j} + \mathfrak{S}_{s_i} = 0, \quad (2)$$

де s – узагальнене позначення координат вузлів; $\mathfrak{K}_{i,j}$ – параметр жорсткості в'язі, що сполучає i -й та j -й вузли; \mathfrak{S}_{s_i} – позначення проекцій вектора зовнішнього впливу в i -му вузлі моделі.

Найпростіші за формою запису параметричні рівняння деяких в'язей $S_a S_b$, що сполучає незафіксовані a -й та b -й вузли сітчастої структури та перебуває у стані статичної рівноваги під дією зовнішніх зусиль $\bar{\mathfrak{S}}_a$ та $\bar{\mathfrak{S}}_b$, а також в'язі $S_a S_{ref}$, що з'єднує вільний a -й вузол та опорний ref -й вузол (від англ.: *reference point* – базова точка) й є зваженим під дією зовнішнього зусилля $\bar{\mathfrak{S}}_a$ та реакції опори \bar{R}_{ref} , відповідно мають наступну форму [2]:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \delta_{a,i}^2 \cdot \mathfrak{K}_{a,i} + \chi \cdot \delta_{a,b}^2 \cdot \mathfrak{K}_{a,b} + \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{b,j}^2 \cdot \mathfrak{K}_{b,j} - (\varphi_a + \varphi_b) + B_{a,b} = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m-1} \delta_{a,i}^2 \cdot \mathfrak{K}_{a,i} + \chi \cdot \delta_{a,ref}^2 \cdot \mathfrak{K}_{a,ref} + \\ & + \left(R_{x_{ref}} \cdot x_{ref} + R_{y_{ref}} \cdot y_{ref} + R_{z_{ref}} \cdot z_{ref} \right) - \varphi_a + B_{a,ref} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут: δ_{ij} , та \mathfrak{K}_{ij} – довжина в'язі між i -м та j -м вузлами та параметр її жорсткості; φ_i – функція скалярного потенціалу векторного поля впливу в i -му вузлі; m та n – кількість вузлів суміжних із a -м та b -м вузлами відповідно; $R_{s_{ref}}$ – узагальнене позначення величини зусилля у опорному вузлі; B_{ij} – константа, що є сумарним результатом побудови рівнянь типу (3) та (4) [2]; χ – деяке невід'ємне число.

Основна частина. Отже, задаймося функцією деякої поверхні у неявній формі:

$$\zeta(x, y, z) = C, \quad (5)$$

де C – деяка константа.

Приведення саме до такої форми необхідне для того, щоб виокремити із множини екіпотенціальних поверхонь, утворених функцією $\zeta(x,y,z)$, саме ту поверхню, фрагмент якої у дискретній формі буде віднайдено в процесі моделювання. Окрім того така форма дозволяє виокремити саму функцію скалярного поля φ , що відповідає функції $\zeta(x,y,z)$, тобто:

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \zeta(x, y, z). \quad (6)$$

Задамо елементарний фрагмент двовимірної регулярної сітки II-го типу з 4-ма вільними та 8-ма базовими вузлами. Останні представлятимуть собою опорний контур i , з математичної точки зору, крайові умови задачі. Топологічну схему із розмірами в'язей сітки (крок вузлів сітки у початковому – ненавантаженому – стані відповідає 1 умовній одиниці) та позначенням вузлів

представлено на рисунку 1.

Проекції векторів поля зовнішнього впливу $\bar{\mathfrak{S}}$, що діятиме на вільні вузли дискретної моделі, у відповідності до [1] визначатимуться як векторні компоненти градієнта поля скалярного потенціалу φ :

$$\mathfrak{S}_{s_i} = \partial\varphi_i / \partial s_i. \quad (7)$$

В якості функції потенціалу оберемо математичну функцію, що описує характер розподілу потенціалу електростатичного поля напруженості у просторі від точкового заряду величиною q . Дана функція для деякої i -ї точки простору має вигляд:

$$\varphi_i = q / \left((x_q - x_i)^2 + (y_q - y_i)^2 + (z_q - z_i)^2 \right)^{1/2} = q / l_{q,i}, \quad (8)$$

де x_q, y_q та z_q – координати точкового заряду у просторі, а $l_{q,i}$ – відстань від точкового заряду до i -ї точки простору (в нашому випадку до вузла).

Відповідно до системи (7) величини проекцій вектору зовнішнього впливу в деякій i -й точці простору становитимуть:

$$\mathfrak{S}_{s_i} = \partial\varphi_i / \partial s_i = q \cdot (s_q - s_i) / l_{q,i}^3. \quad (9)$$

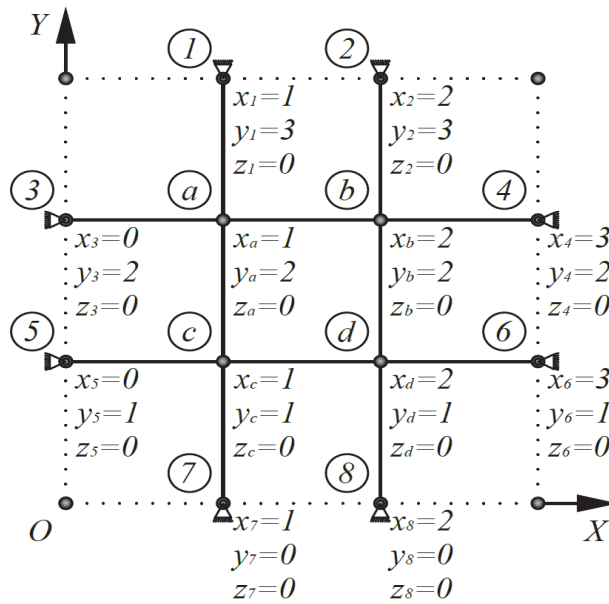


Рис. 1. Топологічна схема дискретної моделі з координатами вузлів

● та \triangle – позначення вільних та базових вузлів сіток; – ребра, показані умовно

Користуючись топологічною схемою на рисунку 1, побудуємо системи рівнянь двох типів:

1) рівноваги типу (2) для вільних вузлів моделі:

$$-(\mathfrak{N}_{a,1} + \mathfrak{N}_{a,3} + \mathfrak{N}_{a,b} + \mathfrak{N}_{a,c}) \cdot s_a + \mathfrak{N}_{a,1} \cdot s_1 + \mathfrak{N}_{a,3} \cdot s_3 + \mathfrak{N}_{a,b} \cdot s_b + \mathfrak{N}_{a,c} \cdot s_c + \mathfrak{S}_{s_a} = 0, \quad (10)$$

$$-(\mathfrak{N}_{b,2} + \mathfrak{N}_{b,a} + \mathfrak{N}_{b,4} + \mathfrak{N}_{b,d}) \cdot s_b + \mathfrak{N}_{b,2} \cdot s_2 + \mathfrak{N}_{b,a} \cdot s_a + \mathfrak{N}_{b,4} \cdot s_4 + \mathfrak{N}_{b,d} \cdot s_d + \mathfrak{S}_{s_b} = 0, \quad (11)$$

$$-(\mathfrak{N}_{c,a} + \mathfrak{N}_{c,5} + \mathfrak{N}_{c,d} + \mathfrak{N}_{c,7}) \cdot s_c + \mathfrak{N}_{c,a} \cdot s_a + \mathfrak{N}_{c,5} \cdot s_5 + \mathfrak{N}_{c,d} \cdot s_d + \mathfrak{N}_{c,7} \cdot s_7 + \mathfrak{S}_{s_c} = 0, \quad (12)$$

$$-(\mathfrak{N}_{d,b} + \mathfrak{N}_{d,c} + \mathfrak{N}_{d,6} + \mathfrak{N}_{d,8}) \cdot s_d + \mathfrak{N}_{d,b} \cdot s_b + \mathfrak{N}_{d,c} \cdot s_c + \mathfrak{N}_{d,6} \cdot s_6 + \mathfrak{N}_{d,8} \cdot s_8 + \mathfrak{S}_{s_d} = 0; \quad (13)$$

2) систему параметричних рівняння типу (3) і (4) для усіх в'язей сітчастої структури:

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{a,1}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,1} + \delta_{a,3}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,3} + \delta_{a,b}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,b} + \delta_{a,c}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,c} + \\ & + (R_{x_1} \cdot x_1 + R_{y_1} \cdot y_1 + R_{z_1} \cdot z_1) - \varphi_a + B_{a,1} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{b,2}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,2} + \delta_{b,a}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,a} + \delta_{b,4}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,4} + \delta_{b,d}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,d} + \\ & + (R_{x_2} \cdot x_2 + R_{y_2} \cdot y_2 + R_{z_2} \cdot z_2) - \varphi_b + B_{b,2} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{a,3}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,3} + \delta_{a,1}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,1} + \delta_{a,b}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,b} + \delta_{a,c}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,c} + \\ & + (R_{x_3} \cdot x_3 + R_{y_3} \cdot y_3 + R_{z_3} \cdot z_3) - \varphi_a + B_{a,3} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{a,b}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,b} + \delta_{a,1}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,1} + \delta_{a,3}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,3} + \delta_{a,c}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,c} + \\ & + \delta_{b,2}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,2} + \delta_{b,4}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,4} + \delta_{b,d}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,d} - (\varphi_a + \varphi_b) + B_{a,b} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{b,4}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,4} + \delta_{b,2}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,2} + \delta_{b,a}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,a} + \delta_{b,d}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,d} + \\ & + (R_{x_4} \cdot x_4 + R_{y_4} \cdot y_4 + R_{z_4} \cdot z_4) - \varphi_b + B_{b,4} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{a,c}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,c} + \delta_{a,1}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,1} + \delta_{a,3}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,3} + \delta_{a,b}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,b} + \\ & + \delta_{c,5}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,5} + \delta_{c,d}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,d} + \delta_{c,7}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,7} - (\varphi_a + \varphi_c) + B_{a,c} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{b,d}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,d} + \delta_{b,2}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,2} + \delta_{a,b}^2 \cdot \mathfrak{N}_{a,b} + \delta_{b,4}^2 \cdot \mathfrak{N}_{b,4} + \\ & + \delta_{d,c}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,c} + \delta_{d,6}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,6} + \delta_{d,8}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,8} - (\varphi_b + \varphi_d) + B_{b,d} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{c,5}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,5} + \delta_{c,a}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,a} + \delta_{c,d}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,d} + \delta_{c,7}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,7} + \\ & + (R_{x_5} \cdot x_5 + R_{y_5} \cdot y_5 + R_{z_5} \cdot z_5) - \varphi_c + B_{c,5} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{c,d}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,d} + \delta_{c,a}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,a} + \delta_{c,5}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,5} + \delta_{c,7}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,7} + \\ & + \delta_{d,b}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,b} + \delta_{d,6}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,6} + \delta_{d,8}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,8} - (\varphi_c + \varphi_d) + B_{c,d} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{d,6}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,6} + \delta_{d,b}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,b} + \delta_{d,c}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,c} + \delta_{d,8}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,8} + \\ & + (R_{x_6} \cdot x_6 + R_{y_6} \cdot y_6 + R_{z_6} \cdot z_6) - \varphi_d + B_{d,6} = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{c,7}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,7} + \delta_{c,a}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,a} + \delta_{c,5}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,5} + \delta_{c,d}^2 \cdot \mathfrak{N}_{c,d} + \\ & + (R_{x_7} \cdot x_7 + R_{y_7} \cdot y_7 + R_{z_7} \cdot z_7) - \varphi_c + B_{c,7} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \delta_{d,8}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,8} + \delta_{d,b}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,b} + \delta_{d,c}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,c} + \delta_{d,6}^2 \cdot \mathfrak{N}_{d,6} + \\ & + (R_{x_8} \cdot x_8 + R_{y_8} \cdot y_8 + R_{z_8} \cdot z_8) - \varphi_d + B_{d,8} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Пам'ятаючи, що системи рівнянь (10) – (13) та (14) – (25) мають бути багаторазово розв'язані в процесі відтворення циклів ітераційного числення, використаємо ці системи для запису компонентів тотожностей (1) із урахуванням поетапності їх визначення (вказуючи порядкові індекси).

З системи (10) – (13) визначимо компоненти $[s^p]$, $[g^{p-1}]$, $[\mathfrak{N}^p]$ та $[\mathfrak{N}^{p-1}]$:

$$[s^p] = [X^p \quad Y^p \quad Z^p], \quad (26)$$

де $\{X^p\}$, $\{Y^p\}$ та $\{Z^p\}$ – вектор-стовпці координат вузлів, що мають вид:

$$\{X^p\}^T = [x_a^p \quad x_b^p \quad x_c^p \quad x_d^p], \quad (27)$$

$$\{Y^p\}^T = [y_a^p \quad y_b^p \quad y_c^p \quad y_d^p], \quad (28)$$

$$\{Z^p\}^T = [z_a^p \quad z_b^p \quad z_c^p \quad z_d^p]; \quad (29)$$

$$\{g^{p-1}\} = [g_x^{p-1} \quad g_y^{p-1} \quad g_z^{p-1}], \quad (30)$$

де $\{g_x^{p-1}\}$, $\{g_y^{p-1}\}$ та $\{g_z^{p-1}\}$ – вектор-стовпці крайових умов, що мають вид:

$$\begin{aligned} \{g_x^{p-1}\}^T &= [N_{a,l}^{p-1} \cdot x_l + N_{a,3}^{p-1} \cdot x_3 \quad N_{b,2}^{p-1} \cdot x_2 + N_{b,4}^{p-1} \cdot x_4 \quad \rightarrow \\ &\rightarrow N_{c,5}^{p-1} \cdot x_5 + N_{c,7}^{p-1} \cdot x_7 \quad N_{d,6}^{p-1} \cdot x_6 + N_{d,8}^{p-1} \cdot x_8], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \{g_y^{p-1}\}^T &= [N_{a,l}^{p-1} \cdot y_l + N_{a,3}^{p-1} \cdot y_3 \quad N_{b,2}^{p-1} \cdot y_2 + N_{b,4}^{p-1} \cdot y_4 \quad \rightarrow \\ &\rightarrow N_{c,5}^{p-1} \cdot y_5 + N_{c,7}^{p-1} \cdot y_7 \quad N_{d,6}^{p-1} \cdot y_6 + N_{d,8}^{p-1} \cdot y_8], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \{g_z^{p-1}\}^T &= [N_{a,l}^{p-1} \cdot z_l + N_{a,3}^{p-1} \cdot z_3 \quad N_{b,2}^{p-1} \cdot z_2 + N_{b,4}^{p-1} \cdot z_4 \quad \rightarrow \\ &\rightarrow N_{c,5}^{p-1} \cdot z_5 + N_{c,7}^{p-1} \cdot z_7 \quad N_{d,6}^{p-1} \cdot z_6 + N_{d,8}^{p-1} \cdot z_8]; \end{aligned} \quad (33)$$

$$[S^p] = [S_x^p \quad S_y^p \quad S_z^p], \quad (34)$$

де $\{S_x^p\}$, $\{S_y^p\}$ та $\{S_z^p\}$ – вектор-стовпці компонентів зовнішніх впливів, що мають вид:

$$\{S_x^p\}^T = [S_{x_a}^p \quad S_{x_b}^p \quad S_{x_c}^p \quad S_{x_d}^p], \quad (35)$$

$$\{S_y^p\}^T = [S_{y_a}^p \quad S_{y_b}^p \quad S_{y_c}^p \quad S_{y_d}^p], \quad (36)$$

$$\{S_z^p\}^T = [S_{z_a}^p \quad S_{z_b}^p \quad S_{z_c}^p \quad S_{z_d}^p]; \quad (37)$$

$$[N^{p-1}] = \begin{bmatrix} A^{p-1} & F^{p-1} \\ C^{p-1} & D^{p-1} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

де $[A^{p-1}]$, $[B^{p-1}]$, $[C^{p-1}]$ та $[D^{p-1}]$ – блоки матриці $[N^{p-1}]$, що мають форму:

$$[A^{p-1}] = \begin{bmatrix} -\left(N_{a,l}^{p-1} + N_{a,3}^{p-1} + N_{a,b}^{p-1} + N_{a,c}^{p-1}\right) & N_{a,b}^{p-1} \\ N_{b,a}^{p-1} & -\left(N_{b,2}^{p-1} + N_{b,a}^{p-1} + N_{b,4}^{p-1} + N_{b,d}^{p-1}\right) \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$[B^{p-1}] = \begin{bmatrix} N_{a,c}^{p-1} & 0 \\ 0 & N_{b,d}^{p-1} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$[C^{p-1}] = \begin{bmatrix} N_{c,a}^{p-1} & 0 \\ 0 & N_{d,b}^{p-1} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$[D^{p-1}] = \begin{bmatrix} -\left(N_{c,a}^{p-1} + N_{c,5}^{p-1} + N_{c,d}^{p-1} + N_{c,7}^{p-1}\right) & N_{c,d}^{p-1} \\ N_{d,c}^{p-1} & -\left(N_{d,b}^{p-1} + N_{d,c}^{p-1} + N_{d,6}^{p-1} + N_{d,8}^{p-1}\right) \end{bmatrix}. \quad (42)$$

З системи (14) – (25) визначимо компоненти $\{\mathbf{N}^p\}$, $\{\Phi^p\}$, та $[(\delta^p)^2]$:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{N}^p\}^T &= \left[\mathbf{N}_{a,1}^p \quad \mathbf{N}_{b,2}^p \quad \mathbf{N}_{a,3}^p \quad \mathbf{N}_{a,b}^p \quad \mathbf{N}_{b,4}^p \quad \mathbf{N}_{a,c}^p \quad \rightarrow \right. \\ &\quad \left. \rightarrow \quad \mathbf{N}_{b,d}^p \quad \mathbf{N}_{c,5}^p \quad \mathbf{N}_{c,d}^p \quad \mathbf{N}_{d,6}^p \quad \mathbf{N}_{c,7}^p \quad \mathbf{N}_{d,8}^p \right]; \end{aligned} \quad (43)$$

аналогічний вигляд має й вектор $\{\mathbf{N}^{p-1}\}$, за виключенням індексу $p-1$;

$$\begin{aligned} \{\Phi^p\}^T &= \left[\Phi_a^p \quad \Phi_b^p \quad \Phi_a^p \quad \Phi_a^p + \Phi_b^p \quad \Phi_b^p \quad \Phi_a^p + \Phi_c^p \quad \rightarrow \right. \\ &\quad \left. \rightarrow \quad \Phi_b^p + \Phi_d^p \quad \Phi_c^p \quad \Phi_c^p + \Phi_d^p \quad \Phi_d^p \quad \Phi_c^p \quad \Phi_d^p \right]; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\left[(\delta^p)^2 \right] = \begin{bmatrix} E^p & F^p \\ G^p & H^p \end{bmatrix}, \quad (45)$$

де $[E^p]$, $[F^p]$, $[G^p]$ та $[H^p]$ – блочні складові матриці $[(\delta^p)^2]$, що мають вид:

$$\left[E^p \right] = \begin{bmatrix} \chi \cdot \delta_{a,1}^{p-2} & 0 & \delta_{a,3}^{p-2} & \delta_{a,b}^{p-2} & 0 & \delta_{a,c}^{p-2} \\ 0 & \chi \cdot \delta_{b,2}^{p-2} & 0 & \delta_{a,b}^{p-2} & \delta_{b,4}^{p-2} & 0 \\ \delta_{a,1}^{p-2} & 0 & \chi \cdot \delta_{a,3}^{p-2} & \delta_{a,b}^{p-2} & 0 & \delta_{a,c}^{p-2} \\ \delta_{a,1}^{p-2} & \delta_{b,2}^{p-2} & \delta_{a,3}^{p-2} & \chi \cdot \delta_{a,b}^{p-2} & \delta_{b,4}^{p-2} & \delta_{a,c}^{p-2} \\ 0 & \delta_{b,2}^{p-2} & 0 & \delta_{a,b}^{p-2} & \chi \cdot \delta_{b,4}^{p-2} & 0 \\ \delta_{a,1}^{p-2} & 0 & \delta_{a,3}^{p-2} & \delta_{a,b}^{p-2} & 0 & \chi \cdot \delta_{a,c}^{p-2} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\left[F^p \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{b,d}^{p-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{b,d}^{p-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{b,d}^{p-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{c,5}^{p-2} & \delta_{c,d}^{p-2} & 0 & \delta_{c,7}^{p-2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$\left[G^p \right] = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{b,2}^{p-2} & 0 & \delta_{a,b}^{p-2} & \delta_{b,4}^{p-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{a,c}^{p-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{a,c}^{p-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{a,c}^{p-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$\left[H^p \right] = \begin{bmatrix} \chi \cdot \delta_{b,d}^{p-2} & 0 & \delta_{c,d}^{p-2} & \delta_{d,6}^{p-2} & 0 & \delta_{d,8}^{p-2} \\ 0 & \chi \cdot \delta_{c,5}^{p-2} & \delta_{c,d}^{p-2} & 0 & \delta_{c,7}^{p-2} & 0 \\ \delta_{b,d}^{p-2} & \delta_{c,5}^{p-2} & \chi \cdot \delta_{c,d}^{p-2} & \delta_{d,6}^{p-2} & \delta_{c,7}^{p-2} & \delta_{d,8}^{p-2} \\ \delta_{b,d}^{p-2} & 0 & \delta_{c,d}^{p-2} & \chi \cdot \delta_{d,6}^{p-2} & 0 & \delta_{d,8}^{p-2} \\ 0 & \delta_{c,5}^{p-2} & \delta_{c,d}^{p-2} & 0 & \chi \cdot \delta_{c,7}^{p-2} & 0 \\ \delta_{b,d}^{p-2} & 0 & \delta_{c,d}^{p-2} & \delta_{d,6}^{p-2} & 0 & \chi \cdot \delta_{d,8}^{p-2} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Зазначимо, що компоненти рівнянь (14) – (25), які містять проекції реакцій опор у базових вузлах, не фігурують у другій – оптимізаційній – тотожності системи (1), оскільки виключаються з розрахунку в процесі побудови даної тотожності.

Що ж стосується вектора бажаних потенціалів $\{\varphi\}$, то величини його компонентів необхідно встановлювати самостійно, визначаючи тим самим, до координат якої конкретно еквіпотенціальної поверхні у просторі мають прямувати координати вузлів дискретної моделі (відповідно до формул (5) та (6)). У найпростішому випадку ці величини мають бути встановлені рівними константам $2 \cdot C$ – для в'язей із двома вільними вузлами, та C – для в'язей, що з'єднують вільний та опорний вузли. В нашому випадку вектор $\{\varphi\}$ матиме таку форму:

$$\{\varphi^p\}^T = [C \ C \ C \ 2 \cdot C \ C \ 2 \cdot C \rightarrow \\ \rightarrow \ 2 \cdot C \ C \ 2 \cdot C \ C \ C \ C]. \quad (50)$$

Маючи усі компоненти системи (1), задамо початкові числові значення усіх її невідомих, формуючи таким чином початкові та крайові умови моделювання.

Вважатимемо, що в першому наближенні всі параметри жорсткості \mathbf{K} заданої раніше сітки дорівнюють 1 (одиниці). Нехай початкові координати вузлів моделі, що необхідні для виконання першого циклу ітераційного числення та першого корегування форми сітки (шляхом уточнення показників жорсткості в'язей) відповідають величинам представленим на топологічній схемі (рис. 1.). Нехай шуканою буде поверхня сталого потенціалу $\varphi = C = 19.00$, форма якої визначається рівнянням (8) при наступних значеннях величини точкового заряду та його координат: $q = 1000$, $x_q = 10$, $y_q = 10$ та $z_q = -50$. Нехай константа $\chi = 0$.

Результати розрахунку, при умові, що встановлена відносна похибка ітераційного числення (по координатах вільних вузлів) становила $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 10^{-6}$, а загальна абсолютна похибка (по значеннях поточного та бажаного потенціалів) дорівнювала $\vartheta_i = 10^{-3}$, представлені у таблицях 1 та 2 для 20-ти ітераційних циклів й проілюстровані на рисунку 2.

Таблиця 1.

Розрахункові значення поточних координат і потенціалів вільних вузлів

Координати вільних вузлів по осі Ox																				
№ →	Порядковий номер ітераційного циклу уточнення координат ↓																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_a	0.968	0.958	0.947	0.934	0.918	0.899	0.875	0.849	0.821	0.797	0.783	0.773	0.767	0.763	0.760	0.759	0.759	0.759	0.759	0.759
x_b	1.970	1.962	1.954	1.945	1.936	1.928	1.924	1.931	1.956	2.002	2.055	2.097	2.124	2.139	2.147	2.151	2.153	2.154	2.154	2.154
x_c	0.968	0.959	0.948	0.936	0.921	0.905	0.885	0.864	0.841	0.821	0.804	0.793	0.787	0.784	0.784	0.784	0.785	0.786	0.787	0.787
x_d	1.970	1.962	1.954	1.945	1.935	1.925	1.916	1.910	1.909	1.913	1.921	1.932	1.945	1.958	1.969	1.978	1.985	1.990	1.993	1.996
Координати вільних вузлів по осі Oy																				
№ →	Порядковий номер ітераційного циклу уточнення координат ↓																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_a	1.970	1.962	1.954	1.945	1.935	1.925	1.916	1.910	1.909	1.913	1.921	1.932	1.945	1.958	1.969	1.978	1.985	1.990	1.993	1.996
y_b	1.970	1.962	1.954	1.945	1.936	1.928	1.924	1.931	1.956	2.002	2.055	2.097	2.124	2.139	2.147	2.151	2.153	2.154	2.154	2.154
y_c	0.968	0.959	0.948	0.936	0.921	0.905	0.885	0.864	0.841	0.821	0.804	0.793	0.787	0.784	0.784	0.784	0.785	0.786	0.787	0.787
y_d	0.968	0.958	0.947	0.934	0.918	0.899	0.875	0.849	0.821	0.797	0.783	0.773	0.767	0.763	0.760	0.759	0.759	0.759	0.759	0.759

Продовження таблиці 1.

Розрахункові значення поточних координат і потенціалів вільних вузлів

Координати вільних вузлів по осі Oz																				
№ →	Порядковий номер ітераційного циклу уточнення координат ↓																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
z_a	0.182	0.207	0.238	0.278	0.331	0.399	0.489	0.600	0.726	0.852	0.963	1.048	1.105	1.140	1.161	1.174	1.181	1.186	1.188	1.190
z_b	0.183	0.211	0.246	0.293	0.356	0.444	0.565	0.729	0.929	1.123	1.262	1.342	1.389	1.416	1.433	1.441	1.446	1.448	1.449	1.449
z_c	0.182	0.203	0.231	0.264	0.307	0.362	0.430	0.512	0.601	0.688	0.764	0.825	0.871	0.906	0.931	0.949	0.962	0.971	0.978	0.982
z_d	0.182	0.207	0.238	0.278	0.331	0.399	0.489	0.600	0.726	0.852	0.963	1.048	1.105	1.140	1.161	1.174	1.181	1.186	1.188	1.190
Розрахункові значення поточних потенціалів вільних вузлів																				
№ →	Порядковий номер ітераційного циклу уточнення поточних потенціалів ↓																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
φ_a	19.373	19.363	19.351	19.335	19.314	19.287	19.253	19.211	19.164	19.118	19.078	19.048	19.028	19.016	19.009	19.005	19.003	19.002	19.001	19.001
φ_b	19.435	19.424	19.410	19.392	19.368	19.335	19.291	19.232	19.163	19.099	19.055	19.031	19.018	19.010	19.005	19.002	19.001	19.000	19.000	19.000
φ_c	19.312	19.303	19.292	19.278	19.260	19.239	19.212	19.180	19.145	19.112	19.083	19.060	19.043	19.030	19.022	19.015	19.011	19.008	19.005	19.001
φ_d	19.373	19.363	19.351	19.335	19.314	19.287	19.253	19.211	19.164	19.118	19.078	19.048	19.028	19.016	19.009	19.005	19.003	19.002	19.001	19.001

Таблиця 2.

Розрахункові значення поточних показників жорсткості в'язей

Величини поточних показників жорсткості в'язей																				
№ →	Порядковий номер ітераційного циклу уточнення показників жорсткості ↓																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\kappa_{a,1}$	0.886	0.779	0.677	0.584	0.500	0.428	0.369	0.323	0.290	0.267	0.254	0.246	0.243	0.241	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
$\kappa_{b,2}$	0.858	0.723	0.596	0.479	0.375	0.286	0.217	0.169	0.143	0.130	0.125	0.122	0.121	0.120	0.119	0.119	0.119	0.119	0.119	0.119
$\kappa_{a,3}$	0.872	0.746	0.624	0.507	0.398	0.299	0.215	0.149	0.101	0.069	0.050	0.040	0.035	0.033	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
$\kappa_{a,b}$	0.861	0.725	0.595	0.472	0.358	0.257	0.172	0.108	0.067	0.043	0.031	0.025	0.021	0.020	0.019	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018
$\kappa_{b,4}$	0.858	0.723	0.596	0.479	0.375	0.286	0.217	0.169	0.143	0.130	0.125	0.122	0.121	0.120	0.119	0.119	0.119	0.119	0.119	0.119
$\kappa_{a,c}$	0.891	0.786	0.685	0.590	0.501	0.421	0.351	0.294	0.250	0.218	0.196	0.182	0.173	0.167	0.163	0.160	0.158	0.157	0.156	0.156
$\kappa_{b,d}$	0.861	0.725	0.595	0.472	0.358	0.257	0.172	0.108	0.067	0.043	0.031	0.025	0.021	0.020	0.019	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018
$\kappa_{c,5}$	0.903	0.809	0.718	0.630	0.548	0.473	0.409	0.356	0.317	0.288	0.266	0.251	0.239	0.230	0.223	0.219	0.215	0.213	0.211	0.210
$\kappa_{c,d}$	0.891	0.786	0.685	0.590	0.501	0.421	0.351	0.294	0.250	0.218	0.196	0.182	0.173	0.167	0.163	0.160	0.158	0.157	0.156	0.156
$\kappa_{d,6}$	0.886	0.779	0.677	0.584	0.500	0.428	0.369	0.323	0.290	0.267	0.254	0.246	0.243	0.241	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
$\kappa_{c,7}$	0.903	0.809	0.718	0.630	0.548	0.473	0.409	0.356	0.317	0.288	0.266	0.251	0.239	0.230	0.223	0.219	0.215	0.213	0.211	0.210
$\kappa_{d,8}$	0.872	0.746	0.624	0.507	0.398	0.299	0.215	0.149	0.101	0.069	0.050	0.040	0.035	0.033	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032

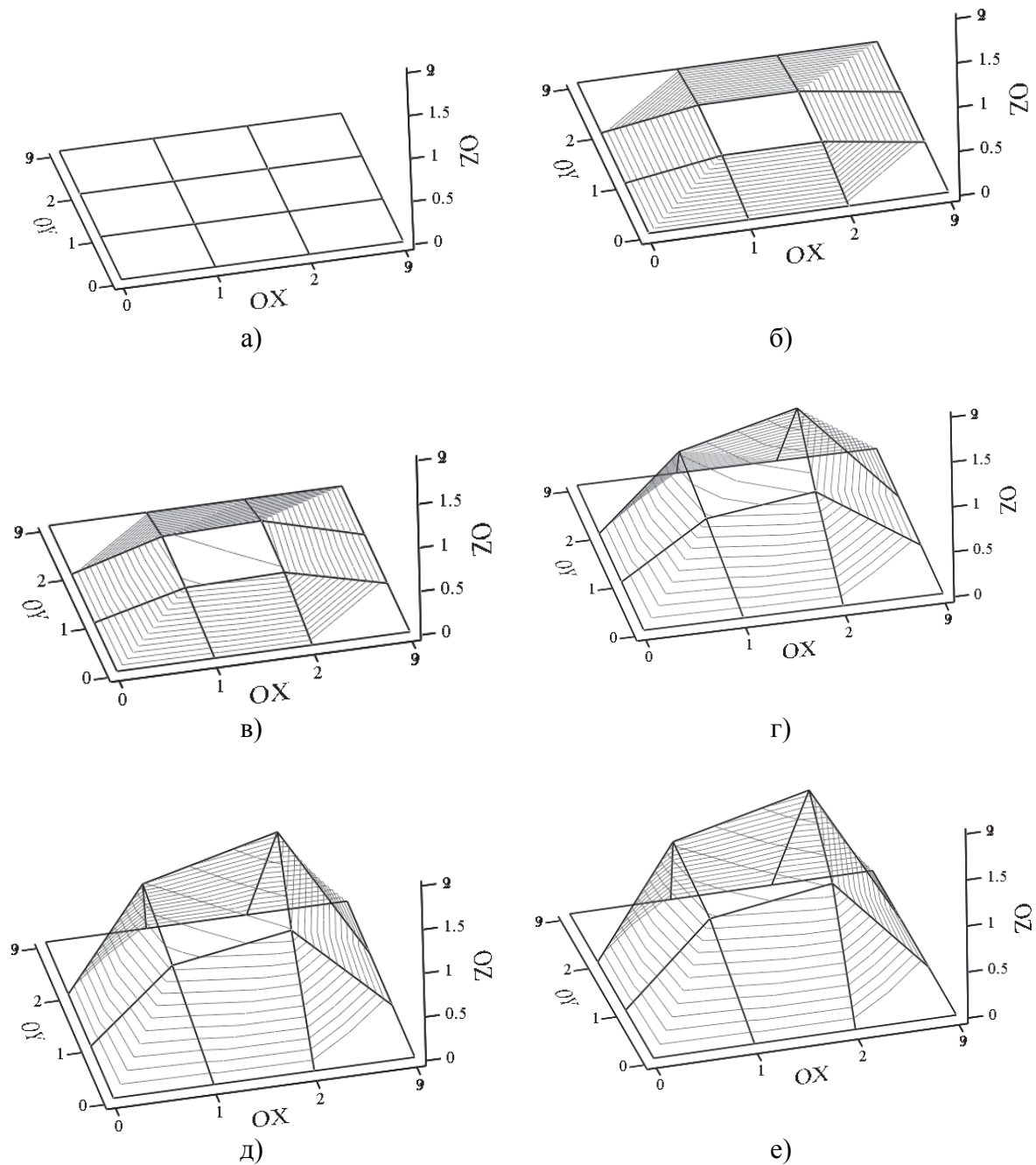


Рис. 2. Етапи формування дискретної поверхні, вільні вузли якої належать заданій функції:
 а) початкова форма (недеформована); б) форма поверхні після 1-го ітераційного циклу;
 в) форма поверхні після 5-го ітераційного циклу; г) форма поверхні після 10-го ітераційного циклу;
 д) форма поверхні після 15-го ітераційного циклу; е) шукана форма поверхні після 20-го ітераційного циклу.

Необхідно чітко розуміти, що заданій функцією $\varphi(x,y,z) = C$ поверхні належатимуть лише вільні вузли дискретного образу (тобто вузли a , b , c та d), оскільки лише вони можуть змінювати своє положення у просторі при корегуванні показників жорсткості в'язей моделі. Цей же факт слід сприймати як значну перевагу продемонстрованого методу формування дискретних образів, оскільки від демонструє відносну незалежність результату моделювання від крайових та початкових умов задачі, а значить може бути корисним у питаннях візуалізації графічних об'єктів складної форми.

Висновки. Метод системного корегування форми сітчастої структури, продемонстрований у даній роботі на прикладі побудови дискретного каркасу поверхні заданої функції, відкриває широкі можливості дискретного моделювання багатьох будівельних конструкцій, архітектурних форм та різноманітних плоских і просторових геометричних об'єктів.

Слід також зазначити, що даний метод лежить на межі між методами геометричного формоутворення, оптимізаційними задачами, а також варіаційними методами чисельного моделювання, поєднуючи їхні ознаки та частково переваги. Окрім того, в контексті вирішеної вище задачі, можна констатувати варіативність наведеного підходу щодо крайових та початкових умов, а також зосередити увагу на можливостях моделювання явищ та фізичних процесів, що мають польову природу і можуть бути охарактеризовані формою поверхонь, кожній точці яких відповідають сталі показники параметрів фізичного стану.

1. Скочко В.І. Диференціальні закономірності між геометричними і фізичними параметрами сітчастих структур та полів, що їх врівноважують / В.І. Скочко, Л.О. Скочко // Основи і фундаменти. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 33. – с. 85-95.

2. Скочко В.І. Рівняння параметрів стану та положення в'язі, що сполучає вільний та закріплений вузли сітчастої структури / В.І. Скочко // Містобудування та територіальне планування. – К.: КНУБА, 2014. – В друці.

3. Плоский В.О. Алгоритм управління параметрами в'язей сітчастих структур, на основі корегування величин скалярного потенціалу зовнішніх впливів / В.О. Плоский, В.І. Скочко // Енергозбереження в будівництві та архітектурі. – К.: КНУБА, 2014. – Вип. 5. – В друці.

REFERENCES

1. Skochko V.I., Skochko L.O. Dyferentsialni zakonomirnosti mizh heometrychnymy i fizychnymy parametramy sitchastykh struktur ta poliv, shcho yikh vrvinovazhuut [Differential patterns between geometric and physical parameters of the network structure and their balancing fields]. *Osnovy i fundamenti*. Kyiv, KNUBA Publ., 2013. Vol. 33, pp. 85-95.

2. Skochko V.I. Rivniannia parametriv stanu ta polozhennia viazi, shcho spoluchaie vilnyi ta zakriplenyi vuzly sitchastoi struktury [Equation of state parameters and conditions of communication that connects free and fixed nodes of network structure]. *Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia*. Kyiv, KNUBA Publ., 2014.

3. Ploskyi V.O., Skochko V.I. Alhorytm upravlinnia parametramy viazei sitchastykh struktur, na osnovi korehuvannia velychyn skaliarnoho potentsialu zovnishnikh vplyviv [The management algorithm for communication settings of meshwork based on correction values of the scalar potential of external influences]. *Enerhozberzhennia v budivnytstvi ta arkhitekturi*. Kyiv, KNUBA Publ., 2014. Vol. 5.

Плоский В.А., Скочко В.И. Построение дискретных каркасов поверхностей с использованием уравнений параметров состояния и положения связей сетчатых структур.

В работе продемонстрировано принцип применения математического алгоритма системного управления параметрами соединений между узлами сетчатых структур, предусматривающего использование уравнений параметров состояния и положения их связей, не примере построения фрагмента дискретного каркаса поверхности.

Vitaliy Ploskiy, Volodimir Skochko. The discrete cages of surfaces constructing using equations of state's parameters and conditions of mesh structure's communications.

In this article, we demonstrate the principle of applying of mathematical algorithm of system control of connection's parameters between mesh structure's nodes by constructing discrete fragment of surface. In this algorithm is used the state parameter's and condition's equations of the connections.

АВТОРИ:

ПЛОСКИЙ Віталій Олексійович, д.т.н., професор, проректор з наукової роботи та міжнародних зв'язків Київського національного університету будівництва і архітектури;
СКОЧКО В.І., асистент кафедри архітектурних конструкцій, Київський національний університет будівництва і архітектури.

РЕЦЕНЗЕНТ:

ПУСТЮЛЬГА С.І., д.т.н., професор, декан машинобудівного факультету, Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна.

REVIEWER:

S. PUSTIULHA, Doctor of Science in Technology, Professor, Dean of Mechanical Engineering Faculty, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Стаття надійшла в редакцію 28.08.2014р.