

Фещук Ю.П.

*Луцький національний технічний університет***РОЗКРИТТЯ БЕРЕГІВ ТРІЩИН ІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ,
ОСЛАБЛЕНОЇ ЧОТИРМА РІВНОВІДДАЛЕНИМИ ТРІЩИНАМИ**

Задача про напружений стан циліндричних ізотропних оболонок з чотирма рівновіддаленими тріщинами зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Розв'язок системи СІР показав, що за всіх інших однакових умов для випадку взаємодії чотирьох тріщин для ближніх кінців тріщин розкриття дещо менше, ніж для однієї тріщини, але зі зближенням вершин тріщин розкриття швидко зростає

Ключові слова: оболонка з тріщинами, інтегральні рівняння, розкриття тріщини.

Постановка проблеми. Міцність реальних твердих тіл, зокрема тонкостінних, визначається не лише їх фізико-механічною природою, а й істотно залежить від дефектності їх структури. Дослідити напружено-деформований стан та граничну рівновагу тіла можна лише з урахуванням дефектів, що містяться в тілі (мікро- та макротріщини, непровари, надрізи, різного роду порожнини і включення, границі блоків і зерен структури тощо), а також конструкційних отворів та включень. Під час деформації твердого тіла біля таких концентраторів виникає інтенсивність напружень, що призводить до пластичного течіння матеріалу, утворення та поширення тріщин, тобто до локального чи повного руйнування тіла. В даний час виробництво конструкційних матеріалів на основі бездефектних технологій є практично нездійсненим завданням. Щоб оцінити вплив різних концентраторів на напружений стан тіл, доцільно дослідити такі з них, для яких можна побудувати відносно прості математичні моделі. Такими є, наприклад, у тонкостінних конструкціях наскрізні тріщини – найбільш небезпечні, з точки зору руйнування, дефекти.

Аналіз останніх досягнень і публікацій. Дослідження напружено-деформованого стану і граничної рівноваги тонких оболонок з тріщинами відображені у низці робіт вітчизняних і зарубіжних авторів. Достатньо повно аналіз цих робіт наведено, зокрема, у монографіях В.В. Панасюка, М.П. Саврука, О.П. Дацишин; М.П. Саврука; Я.М. Григоренка; В.А. Осадчука, у двохтомнику під редакцією Y. Murakami, а також в оглядових статтях Я.С. Підстригача, В.А. Осадчука; В.В. Панасюка, М.П. Саврука; В.П. Шевченка, К.М. Довбні; F. Erdogan, E.S. Folias [1-6]. Значна частина досліджень граничної рівноваги оболонок проводиться на основі крихкого руйнування.

Мета і постановка задач дослідження. Метою дослідження є встановлення залежності розкриття поздовжніх і поперечних тріщин в циліндричній оболонці з чотирма тріщинами від віддалі між ними для різних значень відносного навантаження. Для досягнення даної мети необхідно задачу про напружено-деформований стан циліндричної оболонки з чотирма тріщинами для симетричного відносно них навантаження звести до розв'язання системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь і встановити залежність розкриття поздовжніх і поперечних тріщин в циліндричній оболонці з чотирма тріщинами від віддалі між ними для різних значень відносного навантаження

1. Постановка задачі. Розглянемо пружно-пластичну рівновагу циліндричної оболонки, ослабленої чотирма рівновіддаленими від початку координат xOy тріщинами (дві поздовжні і дві поперечні) однакової довжини $2l_0$, які утворюють з віссю Ox кути $\beta_k = \frac{2\pi}{4}(k-1)$, $k=1,2,3,4$.

Береги тріщин знаходяться під дією попарно рівних за величиною нормальних зусиль $N_{21}(x,0) = N_{23}(x,0) = -N_2^0(x)$; $N_{12}(0,y) = N_{14}(0,y) = -N_1^0(y)$ та згинних моментів $M_{21}(x,0) = M_{23}(x,0) = -M_2^0(x)$; $M_{12}(0,y) = M_{14}(0,y) = -M_1^0(y)$; тобто навантаження симетричне відносно ліній тріщин.

В процесі деформації біля вершин тріщин виникають зони пластичних деформацій. На відміну від сферичної оболонки, в циліндричній оболонці довжини зон пластичних деформацій біля поздовжніх і поперечних тріщин будуть різні. Позначимо l_p^1 та l_p^p довжини пластичних зон біля

відповідно ближніх та дальніх вершин поздовжніх тріщин, а l_p^2 та l_2^p – відповідно біля вершин поперечних тріщин. Замінивши зони пластичних деформацій, відповідно до прийнятого аналогу δ_c -моделі, лініями розриву пружних деформацій, отримаємо задачу про пружну рівновагу циліндричної оболонки з чотирма фіктивними тріщинами (двома поздовжніми завдовжки $2l_1 = 2l_0 + l_p^1 + l_1^p$ та двома поперечними завдовжки $2l_2 = 2l_0 + l_p^2 + l_2^p$), на берегах яких виконуються умови типу (3.3.8) за відсутності зсувних і перерізуючих зусиль.

2. Зведення задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь.

Задачу про напружено-деформований стан циліндричної оболонки з чотирма тріщинами для симетричного відносно них навантаження зведемо до розв'язання системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь. В безрозмірних координатах, віднесених до півдовжини кожної з тріщин дана система інтегральних рівнянь має вигляд

$$\sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 \psi_k K_{ik}(\xi, x) d\xi = f_i(x), \quad |x| < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Тут

$$\psi_1(\xi) = l_1 \frac{d}{d\xi} \varepsilon_2(\xi); \quad \psi_2(\xi) = l_1 R_c \frac{d}{d\xi} \chi_2(\xi); \quad \psi_3(\xi) = l_2 \frac{d}{d\xi} \varepsilon_1(\xi);$$

$$\psi_4(\xi) = l_2 R_c \frac{d}{d\xi} \chi_1(\xi); \quad q_2 = q_{21} = q_{23}; \quad q_1 = q_{22} = q_{24} \quad (q = \varepsilon, \chi);$$

$$K_{ii} = -\frac{a_i}{z_{11}} + K_{ii}^0 \quad (i = 1, 2); \quad K_{ii} = -\frac{a_i}{z_{21}} + K_{ii}^0 \quad (i = 3, 4);$$

$$K_{11}^0 = K_{11}^2(z_{11}) + K_{11}^2(z_{12}); \quad K_{22}^0 = K_{33}^2(z_{11}) + K_{33}^0(z_{12});$$

$$K_{33}^0 = K_{11}^1(z_{21}) + K_{11}^1(z_{22}); \quad K_{44}^0 = K_{33}^1(z_{21}) + K_{33}^1(z_{22});$$

$$K_{12} = K_{21} = K_{13}^2(z_{11}) + K_{13}^2(z_{12}); \quad K_{13} = 2K_{11}^1(S_1, t_1);$$

$$K_{14} = K_{23} = 2K_{13}^1(S_1, t_1); \quad K_{24} = 2K_{33}^1(S_2, t_2);$$

$$K_{31} = 2K_{11}^1(S_2, t_2); \quad K_{32} = K_{41} = 2K_{13}^2(S_2, t_2);$$

$$K_{34} = K_{43} = K_{13}^1(z_{12}) + K_{13}^1(z_{22}); \quad K_{42} = 2K_{33}^2(S_2, t_2);$$

$$z_{21} = z_{11} = (x - \xi); \quad z_{12} = -\left(x + \xi + 2\frac{d_1}{l_1}\right); \quad z_{22} = -\left(x + \xi + 2\frac{d_2}{l_2}\right);$$

$$S_1 = -\left(\xi + \frac{d_1}{l_1}\right); \quad S_2 = -\left(\xi + \frac{d_2}{l_2}\right); \quad t_1 = x + \frac{d_1}{l_1}; \quad t_2 = x + \frac{d_2}{l_2};$$

$$a_1 = a_3 = 1; \quad a_2 = a_4 = 3 - 2\nu - \nu^2; \quad K_{11}^2(z_{ij}) = 2\left[\varphi_{2i}(z_{ij}) + \varphi_{3i}(z_{ij})\right] -$$

$$-\varphi_{6i}(z_{ij}); \quad K_{13}^2(z_{ij}) = 2\nu\left[\varphi_{1i}(z_{ij}) + \varphi_{4i}(z_{ij})\right] - (1 - \nu)\varphi_{5i}(z_{ij});$$

$$K_{33}^2(z_{ij}) = 2(1 - \nu)\varphi_{2i}(z_{ij}) - 2(1 + \nu^2)\varphi_{3i}(z_{ij}) + (1 - \nu)^2\varphi_{6i}(z_{ij});$$

$$K_{11}^1(z_{ij}) = \omega_{1i}(z_{ij}); \quad K_{13}^1(z_{ij}) = (1 + \nu)\omega_{2i}(z_{ij});$$

$$K_{33}^1(z_{ij}) = a_2\omega_{1i}(z_{ij}) + \omega_{3i}(z_{ij}); \quad \varphi_{1i} = \left[B_1(z_{1j})\ker'\eta_{ij} +\right.$$

$$\left.+ B_2(z_{2j})\ker'\eta_{ij}\right] \frac{\eta_{ij}}{z_{1j}}; \quad \varphi_{2i} = \left[B_2(z_{2j})\ker'\eta_{ij} - B_1(z_{1j})\ker'\eta_{ij}\right] \frac{\eta_{ij}}{z_{2j}} +$$

$$+\frac{\delta_{1j}}{z_{1j}}; \quad \varphi_{3i} = m\left[\gamma_2(z_{1j})\ker\eta_{ij} - \gamma_1(z_{1j})\ker\eta_{ij}\right];$$

$$\begin{aligned}
\varphi_4 &= m \left[\gamma_1(z_{2j}) \ker \eta_{ij} + \gamma_2(z_{2j}) \operatorname{kei} \eta_{ij} \right]; \quad \varphi_5 = \left[\gamma_2(z_{1j}) \ker' \eta_{ij} - \right. \\
& \left. - \gamma_1(z_{2j}) \operatorname{kei}' \eta_{ij} \right] \frac{m}{\eta_{ij}}; \quad \varphi_6 = \left[\gamma_1(z_{2j}) \ker' \eta_{ij} - \gamma_2(z_{1j}) \operatorname{kei}' \eta_{ij} \right] \frac{m}{\eta_{ij}} + \\
& + \frac{\delta_{1j}}{z_{1j}} \quad (j=1,2); \quad \delta_{ik} - \text{символ Кронекера;} \\
\omega_1(z_{ij}) &= (\eta_{ij} \ker' \eta_{ij} + \delta_{1j}) \frac{1}{z_{ij}}; \quad \omega_2(z_{ij}) = \eta_{ij} \operatorname{kei}' \eta_{ij} \frac{1}{z_{ij}}; \\
\omega_3(z_{1j}) &= 4\omega_{0j}^2 \int_0^{z_{1j}} \operatorname{kei} \omega_{0j} |\xi| d\xi; \quad \omega_3(z_{2j}) = 4\omega_{0j}^2 \int_0^{z_{2j}} \operatorname{kei} \omega_{0j} |\xi| d\xi; \\
K_{11}^1(s_i, t_i) &= \Phi_2 - \Phi_6; \quad K_{13}^1(s_i, t_i) = (1-\nu)\Phi_1 - (1-\nu)\Phi_5; \\
K_{33}^1(s_i, t_i) &= a_2\Phi_2 - (1-\nu)^2\Phi_6 + 4\omega_{0j}^2 \int_0^{\xi} [\Phi_3 - \Phi_4] d\xi; \\
K_{11}^2(s_i, t_i) &= 2\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5; \quad K_{13}^2(s_i, t_i) = 2\nu\Gamma_2 + (1+\nu)\Gamma_4 + (1-\nu)\Gamma_6; \\
K_{33}^2(s_i, t_i) &= 2(1-\nu^2)\Gamma_1 - (1-\nu^2)\Gamma_3 - (1-\nu)^2\Gamma_5; \\
\Phi_1 &= \omega_{0j} \left[B_1(t_i) \ker' \omega_{0j} \rho_i + B_2(t_i) \operatorname{kei}' \omega_{0j} \rho_i \right] \frac{s_i}{\rho_i}; \\
\Phi_2 &= \omega_{0j} \left[B_2(t_i) \ker' \omega_{0j} \rho_i - B_1(t_i) \operatorname{kei}' \omega_{0j} \rho_i \right] \frac{s_i}{\rho_i}; \\
\Phi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\gamma_2(t_i) \ker' \omega_j \rho_i - \gamma_1(t_i) \operatorname{kei}' \omega_j \rho_j \right] \frac{t_i}{\rho_j}; \\
\Phi_4 &= B_1(t_j) \ker \omega_j \rho_j + B_2(t_j) \operatorname{kei} \omega_j \rho_j; \\
\Phi_5 &= -m \left[\gamma_2(t_j) \psi_1 - \gamma_1(t_j) \psi_2 \right]; \quad \Phi_6 = -m \left[\gamma_1(t_j) \psi_1 + \gamma_2(t_j) \psi_2 \right]; \\
\Gamma_1 &= \omega_j \left[B_2(s_j) \ker' \omega_j \rho_j - B_1(s_j) \operatorname{kei}' \omega_j \rho_j \right]; \\
\Gamma_2 &= \omega_j \left[B_1(s_j) \ker' \omega_j \rho_j + B_2(s_j) \operatorname{kei}' \omega_j \rho_j \right]; \\
\Gamma_3 &= m \left[\gamma_2(s_j) \ker \omega_j \rho_j - \gamma_1(s_j) \operatorname{kei} \omega_j \rho_j \right]; \quad \Gamma_5 = m \left[\gamma_1(s_j) \ker \omega_j \rho_j + \right. \\
& \left. + \gamma_2(s_j) \operatorname{kei} \omega_j \rho_j \right]; \quad \Gamma_5 = -m \left[\gamma_1(s_j) \psi_3 + \gamma_2(s_j) \psi_4 \right]; \\
\Gamma_6 &= -m \left[\gamma_2(s_j) \psi_3 - \gamma_1(s_j) \psi_4 \right]; \quad \psi_1 = L_1 \frac{s_j t_j}{\rho_j^2}; \quad \psi_2 = L_2 \frac{s_j t_j}{\rho_j^2}; \\
\psi_3 &= L_1 s_j^2 / \rho_j^2 - \ker' \omega_j \rho_j / \omega_j \rho_j; \quad \psi_4 = L_2 s_j^2 / \rho_j^2 - \operatorname{kei}' \omega_j \rho_j / \omega_j \rho_j; \\
L_1 &= 2 \ker' \omega_j \rho_j / \omega_j \rho_j + \operatorname{kei} \omega_j \rho_j; \quad L_2 = 2 \operatorname{kei}' \omega_j \rho_j / \omega_j \rho_j - \ker \omega_j \rho_j; \\
B &= -4\pi / D_0; \quad \eta_{ij} = \omega_i |z_{ij}|; \quad \omega_i = \beta l_i; \quad \beta = \gamma / 2; \quad \gamma^A = D_0 / (DR^2); \\
m &= \beta / \sqrt{2}; \quad \rho_i = l_i / d_i; \quad \gamma_1 = B_3 + B_4; \quad \gamma_2 = B_4 - B_3; \\
B_1(s_j) &= \sin ms_j \operatorname{sh} ms_j; \quad B_2(s_j) = \cos ms_j \operatorname{ch} ms_j; \\
B_3(s_j) &= \sin ms_j \operatorname{ch} ms_j; \quad B_4(s_j) = \cos ms_j \operatorname{sh} ms_j;
\end{aligned}$$

$$f_i(x) = B^{(i)} \begin{cases} P^{(i)}, & x \in 2l_0; \\ P_i^{(2)}, & x \in l_p^j; \\ P_i^{(3)}, & x \in l_j^p; \quad i=1,2,3,4; \quad j=1,2 \end{cases}$$

$$B^{(1)} = B^{(3)} = B; \quad B^{(2)} = B^{(4)} = B/(Rc);$$

$$P^{(1)} = N_2^0(x); \quad P^{(2)} = M_2^0(x); \quad P^{(3)} = N_1^0(y); \quad P^{(4)} = M_1^0(y);$$

$$P_1^{(2)} = N_2^{(2)}; \quad P_2^{(2)} = M_2^{(2)}; \quad P_3^{(2)} = N_1^{(2)}; \quad P_4^{(2)} = M_1^{(2)};$$

$$P_1^{(3)} = N_2^{(3)}; \quad P_2^{(3)} = M_2^{(3)}; \quad P_3^{(3)} = N_1^{(3)}; \quad P_4^{(3)} = M_1^{(3)},$$

– зусилля та моменти реакції ближніх пластичних зон на пружний об'єм, а $P_i^{(3)}$ – реакції дальніх пластичних зон. Відомо, що $P_i^{(2)}$ та $P_i^{(3)}$ повинні задовольняти відповідні умови пластичності тонких оболонок у кожній з пластичних зон.

Незважаючи на той факт, що до деформації всі чотири тріщини були рівні між собою, після деформації, за даних обмежень на навантаження, будуть рівними попарно поперечні та поздовжні тріщини, так як вони деформуються по-різному. Тобто в порівнянні з сферичною оболонкою з чотирма тріщинами невідомих зусиль та моментів, що діють в пластичних зонах циліндричної оболонки, буде в два рази більше та невідомих пластичних зон .. та l_i^p буде також у два рази більше. Відповідно збільшиться у два рази кількість умов пластичності та умов обмеженості напружень. За структурою системи сингулярних інтегральних рівнянь однакові. Тому останню розв'язуємо за допомогою алгоритму, наведеного нижче.

3. Розв'язок системи СІР. Розв'язок системи СІР будемо будувати, використовуючи узагальнення [7] методу механічних квадратур для одного рівняння. В зв'язку з цим відзначимо, що функції $f_1(\alpha_1 s)$, $f_2(\alpha_2 s)$, які знаходяться в правих частинах інтегральних рівнянь, мають розриви в точці $s = \tau_0 = l_0 / l_1$. Порівняння аналітичного розв'язку більш простої системи інтегральних рівнянь ($K_{mj}^0 = 0$) з розривом в правій частині з відповідним розв'язком, отриманим за допомогою методу механічних квадратур, показало, що використання цього методу безпосередньо до систем такого типу приводить до значних похибок розв'язку в околі точки розриву. Але саме в цій точці поведінка розв'язку є найцікавішою.

При побудові розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь з розривними функціями в правих частинах використаємо метод для одного рівняння аналогічного типу. З цією метою шукані функції Ω_m запишемо у вигляді суми

$$\Omega_m(s) = h_m(s) + \psi_m(s) \quad (m=1,2). \quad (1)$$

Тут $h_m(s)$ – розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} \int_{-1}^1 \frac{h_j(t)}{t-s} dt = f_i(s), \quad |s| \leq 1 \quad (i=1,2), \quad (2)$$

який задовольняє умови

$$\int_{-1}^1 h_{i(t)} dt = 0. \quad (3)$$

З врахуванням (2), для визначення $\psi_m(s)$ отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} \int_{-1}^1 \psi_j(t) \left\{ \frac{a_{ij}}{t-s} + k \alpha_1 \psi_{ij}^0 [\alpha_1(t-s)] \right\} dt = g_i(s), \quad (4)$$

$$|s| < 1, \quad i=1,2$$

з умовами

$$\int_{-1}^1 \psi_i(u) dt = 0, \quad (5)$$

де

$$g_i(s) = -k \alpha_1 \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^2 h_j(t) \psi_{ij}^0 [\alpha_1(t-s)] dt. \quad (6)$$

Отже розв'язання системи СІР звелось до розв'язання канонічних сингулярних рівнянь типу (2) і системи сингулярних інтегральних рівнянь (4) з неперервною правою частиною.

Функції $h_i(t)$, як розв'язок рівнянь (2) з умовами (3), не є обмеженими на кінцях відрізка $[-1,1]$. Отже, використавши формулу обернення інтегралів типу Коші отримаємо

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} h_j(t) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2} f_i(\tau)}{\tau-t} d\tau. \quad (7)$$

Після інтегрування та деяких перетворень маємо

$$h_i(t) = \frac{1}{\Delta \pi^2 \sqrt{1-t^2}} [\pi D_i^0 t - D_i z(t)], \quad i=1,2 \quad (8)$$

де

$$D_i^0 = F_R^i(N_2^0, M_2^0), \quad D_i = F_R^i(N, M),$$

$$F_R^i(X, Y) = b_{1i} \frac{X}{2h\sigma_T} + b_{2i} \frac{k^*}{h^2\sigma_T} Y, \quad i=1,2,$$

$$b_{11} = a_{22}, \quad b_{12} = -a_{21}, \quad b_{21} = -a_{12}, \quad b_{22} = a_{11},$$

$$z(t) = 2v^* t + \sqrt{1-t^2} L_1(t), \quad v^* = \arccos \tau_0,$$

$$L_1(t) = \ln \left| \frac{\tau_0 \sqrt{1-t^2} - t \sqrt{1-\tau_0^2}}{\tau_0 \sqrt{1-t^2} + t \sqrt{1-\tau_0^2}} \right|, \quad k^* = \frac{h}{2Rc}.$$

Підставляючи (8) в (6) для правої частини системи (4) отримаємо

$$g_i(s) = g_i^0(s) + \sum_{p=1}^2 G_p g_i^{(p)}(s), \quad i=1,2. \quad (9)$$

Тут

$$G_1 = \frac{N}{2h}, \quad G_2 = \frac{k^* M}{h^2},$$

$$g_i^0(s) = k_s \pi \sum_{j=1}^2 D_j^0 I_{ij}^0(s), \quad g_i^{(p)}(s) = -k_s \sum_{j=1}^2 b_{pj} I_{ij}^*(s),$$

$$I_{ij}^0(s) = \int_0^\pi \psi_{ij} [\alpha_1 (\cos v - s)] \cos v d\vartheta,$$

$$I_{ij}^*(s) = \int_0^\pi \psi_{ij} [\alpha_1 (\cos v - s)] z(\cos v) d\vartheta,$$

$$k_s = k\alpha_1 / (\Delta\pi^2).$$

У відповідності до (9) функції $\psi_i(t)$ будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$\psi_i(t) = \psi_i^0(t) + \sum_{p=1}^2 G_p \psi_i^{(p)}(t). \quad (10)$$

Кожна пара $\psi_i^{(p)}$ ($i=1,2$) є розв'язком системи інтегральних рівнянь (4) з правою частиною $g_i^{(p)}$ і задовольняє умови

$$\int_{-1}^1 \psi_i^{(p)}(t) dt = 0, \quad p=0,1,2. \quad (11)$$

Розв'язок $\psi_i^{(p)}(t)$, $i=1,2$, $p=0,1,2$ будемо за допомогою методу механічних квадратур. Зобразимо $\psi_i^{(p)}(t)$ у вигляді

$$\psi_i^{(p)}(t) = \frac{\varphi_i^{(p)}(t) + C_i^{(p)}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (12)$$

де $\varphi_i^{(p)}(t)$ – регулярні функції на відрізку $[-1,1]$.

Для шуканих функцій $\varphi_i^{(p)}(t)$ будемо інтерполяційні поліноми Лагранжа по чебишевських вузлах

$$\tau_l = \cos \vartheta_l, \quad \vartheta_l = \frac{2l-1}{2n_c} \pi, \quad (13)$$

які можна записати у вигляді

$$L_{nc}[\varphi_j^{(p)}, t] = \sum_{\nu=0}^{n_c-1} A_{i\nu}^{(p)} T_\nu(\tau). \quad (14)$$

Тут

$$A_{i\nu}^{(p)} = \frac{\lambda_\nu}{n_c} \sum_{l=1}^{n_c} \varphi_i^{(p)}(\tau_l) \cos \nu \vartheta_l, \quad \lambda = \begin{cases} 1, & \nu=0 \\ 2, & \nu>0, \end{cases}$$

T_ν – многочлени Чебишева першого роду, n_c – число вузлів Чебишева (парне). Замінивши тепер в (4) сингулярний інтеграл квадратурною формулою та застосувавши формулу Гауса до інтеграла від регулярної частини ядра, отримаємо систему $6n_c$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $6n_c$ наближених значень шуканих функцій $\varphi_i^{(p)}(\tau_l)$ у вузлових точках і шести постійних $C_i^{(p)}$. Приєднуючи до отриманої системи 6 рівнянь умови (11) та враховуючи (12), (13), отримаємо повну систему $6(n_c + 1)$ алгебраїчних лінійних рівнянь для $6(n_c + 1)$ невідомих.

Для випадку, коли оболонка і береги тріщин завантажені симетрично відносно лінії $\alpha = 0$, шукані функції будуть непарні і тому розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь $3n_c$ можна звести до розв'язання системи $3n_c$ алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}\varphi_i^{(p)}(t) &= \sum_{\nu=1}^{n_c/2} A_{i, 2\nu-1}^{(p)} T_{2\nu-1}(t), \\ A_{i, 2\nu-1}^{(p)} &= \frac{4}{nc} \sum_{l=1}^{n_c/2} \varphi_{iv}^{(p)} \cos[(2\nu-1)\vartheta_l], \\ \varphi_{iv}^{(p)} &= \varphi_i^{(p)}(\cos \vartheta_\nu), \quad i=1, 2, \quad p=0, 1, 2, \quad l=1, \overline{n_c/2},\end{aligned}\tag{15}$$

$\varphi_{iv}^{(p)}$ – значення шуканих функцій у вузлових точках, визначаються із системи

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{\nu=1}^{n_c/2} (\alpha_{lv}^{ij} \varphi_{j\nu}^{(p)}) = g_{il}^{(p)}.\tag{16}$$

Інтегруючи отриманий розв'язок, розкриття тріщини $\delta(\alpha, \gamma)$ в довільній її точці визначимо за формулою

$$\delta(\alpha, \gamma) = [v(\alpha/\alpha_1)] + \gamma[\theta_2(\alpha/\alpha_1)], \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad |\gamma| < h.\tag{18}$$

Тут

$$\begin{aligned}[v(t)] &= \frac{4}{k_E} l_1 \mu_1(t); \quad [\theta_2(t)] = -\frac{4}{k_E} \frac{l_1}{Rc} \mu_2(t), \quad |t| \leq 1, \\ \mu_i(t) &= \frac{1}{\pi^2 \Delta} \left\{ \pi D_i^0 R_1(t) - D_i(2\vartheta^* R_1(t) + W(t)) \right\} + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n_c/2} A_{i, 2\nu-1} R_{2\nu-1}(t), \quad i=1, 2, \\ R_m(t) &= -\frac{1}{m} \sin(m \arccos t), \quad m=1, 2, \dots, \\ W(t) &= \begin{cases} tL_1(t) - \tau_0 L_2(t), & t \neq \tau_0, \\ -2\tau_0 \ln \tau_0, & t = \tau_0, \end{cases} \\ L_2(t) &= \ln \left| \left(\sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-\tau_0^2} \right) / \left(\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-\tau_0^2} \right) \right|.\end{aligned}$$

Прирівнявши праву частину (18) до величини критичного розкриття тріщини δ_c , яке при заданих умовах назовнішнього середовища та швидкості деформації є константою матеріалу [8, 9], прийдемо до критеріального співвідношення, яке встановлює зв'язок між зовнішнім навантаженням, довжиною тріщини, геометричними та фізико-механічними параметрами оболонки в умовах гранично-рівноважного стану.

На рис. 1 і рис. 2 показано залежність відносного розкриття δ_i^* вершини відповідно поздовжніх і поперечних тріщин від відносної віддалі між ними $\rho^0 = l_0 / d$. Суцільні лінії відповідають внутрішнім вершинам тріщин (ближче до початку координат), пунктирні – зовнішнім. Розрахунок проводився для таких значень параметрів: $l_0 / h = 10$; $R / h = 100$; $N_2^0 = N_1^0 = N^0 = const$. Криві 1, 2, 3 відповідають відносному навантаженню $n^0 = N^0 / (2h\sigma_T) = 0,3; 0,4; 0,5$. Як бачимо, за всіх інших однакових умов для випадку взаємодії чотирьох тріщин для ближніх кінців тріщин розкриття дещо менше, ніж для однієї тріщини, але зі зближенням вершин тріщин розкриття швидко зростає. Для циліндричної оболонки після деформації поздовжні тріщини будуть дещо більшими поперечних тріщин

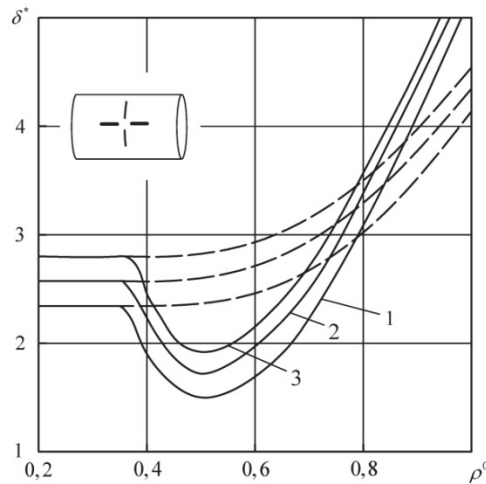


Рис.1. Розкриття поздовжніх тріщин в циліндричній оболонці з чотирма тріщинами

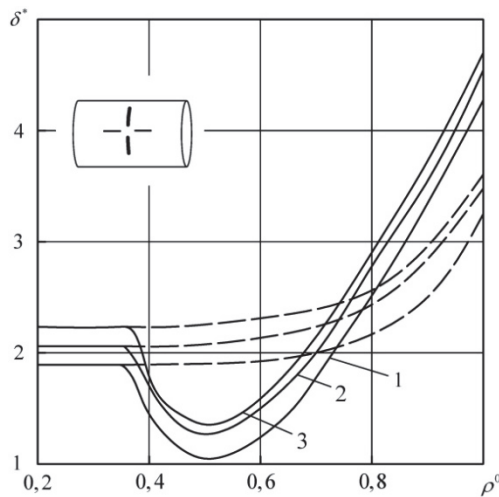


Рис. 2. Розкриття поперечних тріщин в циліндричній оболонці з чотирма тріщинами

Висновки

1. В роботі встановлено залежність відносного розкриття δ_i^* вершини відповідно поздовжніх і поперечних тріщин від відносної віддалі між ними різних значень відносного навантаження.
2. Встановлено, що розкриття поздовжніх тріщин за однакових інших умов, дещо більше, ніж поперечних.

1. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
2. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Чисельний аналіз у плоских задачах теорії тріщин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
3. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 222 с.

4. Николишин М.М. Предельное равновесие трансверсально-изотропной сферической оболочки с двумя поверхностными трещинами / Николишин М.М., Швабюк В.И., Фешук Ю.П. // Прикладная механика. – 2009. – 45, №4. – С. 109 – 115.
5. Erdogan F.E., Ratwanni M.A., Yuceoglu U. On the effect of orthotropic in a cracked cylindrical shell // Intern.J.Fract. – 1974. – 10, № 3. – P. 369...374.
6. Kushnir M., Nykolyshyn M., Rostun M., Feshchuk Yu.. Limit analysis of a shallow shell with a system of arbitrarily located cracks // Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 8TH SSTA conference, Jurata, Poland, 12-14 October 2005. P.139–142.
7. Loakimidie N.I. The numerical solution of crack problems in plane elasticity in the case of loading discontinuities / Loakimidie N.I. // Eng. Fract. Mech. – 1980. –13. № 4. – P. 709 – 716
8. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / Панасюк В.В. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
9. Erdogan F. Plastic strip model for thin shells / Erdogan F. // Prospects Fract. Mech.– Leyden, 1974. – P. 609 – 617

REFERENCES

1. Panasyuk, V. (1968). *The ultimate balance of fragile bodies with cracks*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 246 p.
2. Savruk, M., Osyv, P. & Prokopchuk, I. (1989). *Numerical analysis of plane problems of the theory of cracks*. Kyiv, Naukova dumka publ., 248 p.
3. Osadchuk, V. (1985). *Stress-strain state and limit equilibrium of shells with cuts*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 222 p.
4. Nikolishin, M., Shvabyuk, V. & Feshchuk, Yu. (2009). The ultimate balance of transversely isotropic spherical shell with two surface cracks. *Journal of Applied Mechanics*. No. 4. Pp. 109 - 115.
5. Erdogan, F., Ratwanni, M. & Yuceoglu, U. (1974). On the effect of orthotropic in a cracked cylindrical shell. *Intern.J.Fract.* No. 3. Pp. 369-374.
6. Kushnir, M., Nykolyshyn, M., Rostun, M. & Feshchuk, Yu. (2005). Limit analysis of a shallow shell with a system of arbitrarily located cracks. *Shell Structures: Theory and Applications*. Proceedings of the 8th SSTA conference, Jurata, Poland, 12-14 October 2005. Pp.139-142.
7. Loakimidie, N. (1980). The numerical solution of crack problems in plane elasticity in the case of loading discontinuities. *Eng. Fract. Mech.* No. 4. Pp. 709 - 716
8. Panasyuk V. (1991). *Mechanics quasibrittle destruction of materials*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 416 p.
9. Erdogan, F. (1974). Plastic strip model for thin shells. *Prospects Fract. Mech.* Leyden, pp. 609 – 617.

Фешук Ю.П. Раскрытие берегов трещин изотропной цилиндрической оболочки, ослабленной четырьмя равноудаленными трещинами.

Задача о напряженном состоянии цилиндрических анизотропных оболочек с четырьмя равноудаленными трещинами сведена к системе сингулярных интегральных уравнений. Решение системы СИУ показало, что при всех прочих равных условиях для случая взаимодействия четырех трещин для ближних концов трещин раскрытия несколько меньше, чем для одной трещины, но со сближением вершин трещин раскрытие быстро растет

Ключевые слова: оболочка с трещинами, интегральные уравнения, раскрытие трещины.

Yu. Feshchuk. Disclosure of crack of isotropic cylindrical shell weakened by four equidistant cracks.

The study is setting depending disclosure longitudinal and transverse cracks in cylindrical shell with four cracks on the distance between them for different values of the relative load. To achieve this goal it is necessary problem of stress-strain state of cylindrical shell with four cracks against them for symmetric load reduced to solving the four singular integral equations and install dependence disclosure longitudinal and transverse cracks in cylindrical shell with four cracks on the distance between them to different values of the relative burden.

In this work the disclosure crack isotropic cylindrical shell weakened by four equidistant fissures.

The problem of stress state of isotropic cylindrical shells with four cracks equidistant reduced to a system of singular integral equations.

Solution CIP system showed that all other things being equal interaction in the case of four cracks for cracks near-end disclosure somewhat less than for a crack, but with the convergence of the crack tip disclosure growing rapidly. For cylindrical shell after deformation longitudinal cracks will be slightly larger transverse cracks.

Keywords: the shell cracked, integral equations, the crack opening

АВТОР:

ФЕЩУК Юрій Петрович, доцент кафедри матеріалознавства та пластичного формування конструкцій машинобудування, Луцький національний технічний університет, e-mail: yurafp@meta.ua.

AUTHOR:

Yurii FESHCHUK, Assoc. Professor of Department of materials science and engineering constructions plastic forming, Lutsk national technical university, e-mail: yurafp@meta.ua.