УДК 629.113
UDC 629.113

Хребет[1] В.Г., Вербицкий[2] В.Г., Банников[3] В.А., Вельмагина[4] Н.А.
[1] Национальный авиационный университет, Киев
[2] Государственний экономико–технологический унииверситет транспорта, Киев
[3] Национальный технический университет, Запорожье
[4] Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Днепропетровск

ПОСТРОЕНИЕ БИФУРКАЦИОННОГО МНОЖЕСТВА МОДЕЛИ ДВУХОСНОГО АВТОМОБИЛЯ

Рассмотрен альтернативный подход определения условий безопасной потери устойчивости (в смысле Н.Н. Баутина) прямолинейного стационарного режима движения модели двухосного экипажа с избыточной поворачиваемостью на основе геометрической картины механизма дивергентной потери устойчивости. Силы увода как функции углов увода представлены с точностью до кубических членов. Условия безопасной потери устойчивости зависят от соотношения между коэффициентами сопротивления уводу и коэффициентами сцепления в поперечном направлении осей.

Ключевые слова: автомобиль, коэффициент отвода, коэффициент сцепления, устойчивость движения, дивергентные бифуркации

Вступ. Исследованию общих вопросов устойчивости движения транспортных средств посвящено значительное количество работ [1,2,3,4,5], однако задача определения характера поведения системы в области неустойчивости и выявление причин ее возникновения остается по-прежнему актуальной.

Одна из традиционных в практике теоретических исследований моделей колесного экипажа базируется на плоской велосипедной схеме, которая учитывает нелинейные упругие свойства колеса (нелинейный характер сил увод). Важным обобщением известного понятия из теории экипажа – критической скорости прямолинейного движения (отвечает дивергентному характеру потери устойчивости) является понятие бифуркационного множества. Оно определяет критическую скорость всего множества стационарных режимов. Типичной и самой простой реализацией бифуркационного множества в окрестности прямолинейного режима является полукубическая парабола, однако рецепты построения бифуркационных множеств в аналитическом виде даже для случая одиночного экипажа отсутствовали (точка заострения соответствует критической скорости прямолинейного движения). Результаты Troger H., Scheidl R., Kacani V., Stribersky A., Zeman K. Лобас Л. Г. [5, 6, 7, 8] базировались на численном методе продолжения по двум параметрам, это затрудняет определение условий безопасной потери устойчивости прямолинейного режима движения в пространстве параметров по Н.Н. Баутину[9].

Постановка проблемы Рассмотрим систему, состоящую из корпуса с неповоротной колесной осью и управляющего колесного модуля, угол поворота которого относительно корпуса равен θ .

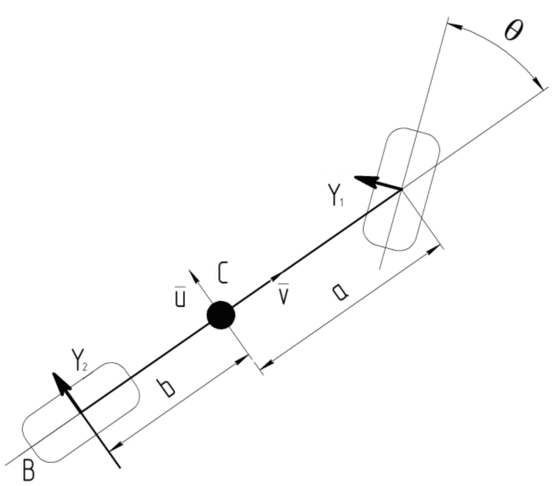


Рис. 1 – Расчетная схема модели автомобиля

Пусть m и J- масса и центральный момент инерции системы относительно вертикальной оси, а и b - расстояния точки С до передней и задней колесных осей соответственно. Уравнения плоскопараллельного движения одноколейной модели автомобиля с постоянной скоростью имеют вид

$$\begin{cases} m(\dot{\ } \quad Y_1 cos\theta + Y_2, \\ J\dot{\ } \quad s\theta - bY_2, \end{cases} \tag{1}$$

$$Y_i = \frac{k_i\delta_i}{\sqrt{1+\left(\frac{k_i\delta_i}{\kappa_i^2 Z_i}\right)^2}},$$

где Y_i – силы увода, k_i – коэффициенты сопротивления уводу, κ_i – коэффициенты сцепления в боковом направлении, Z_i –вертикальные реакции на осях.

Их линеаризованный вариант (в окрестности значений $(u=0, \omega=0)$ имеет вид

$$\begin{gathered} Y_1 = -k_1\frac{u+a\omega}{V},\ Y_2 = -k_2\frac{-u+b\omega}{V}, \\ \dot{\ } \quad \frac{k_1+k_2}{mV}u - \left(\frac{v+k_1a-k_2b}{mV}\right)\omega,\ \dot{\ } \quad \frac{k_1a+k_2b}{JV}u - \frac{k_1a^2+k_2b^2}{JV}\omega. \end{gathered} \tag{2}$$

Система (2) дает возможность исследовать устойчивость прямолинейного движения автомобиля, реализуемого при значении параметра $\theta = 0$ (угол поворота управляемых колес). Перейдем в (2) к переменным δ_1, δ_2, тогда

$$\begin{gathered} \dot{\delta}_1 \quad \left(\frac{V}{l}+\frac{k_1}{V}\left(\frac{l}{m}+\frac{a^2}{J}\right)\right)\delta_1 + \left(\frac{V}{l}+\frac{k_2}{V}\left(\frac{l}{m}+\frac{ab^2}{J}\right)\right)\delta_2; \\ \dot{\delta}_2 \quad \left(\frac{V}{l}+\frac{k_1}{V}\left(\frac{l}{m}+\frac{ab}{J}\right)\right)\delta_1 + \left(\frac{V}{l}+\frac{k_2}{V}\left(\frac{l}{m}+\frac{b^2}{J}\right)\right)\delta_2. \end{gathered} \tag{3}$$

Характеристическое уравнение, как известно, инвариантно относительно невырожденных линейных замен фазовых переменных

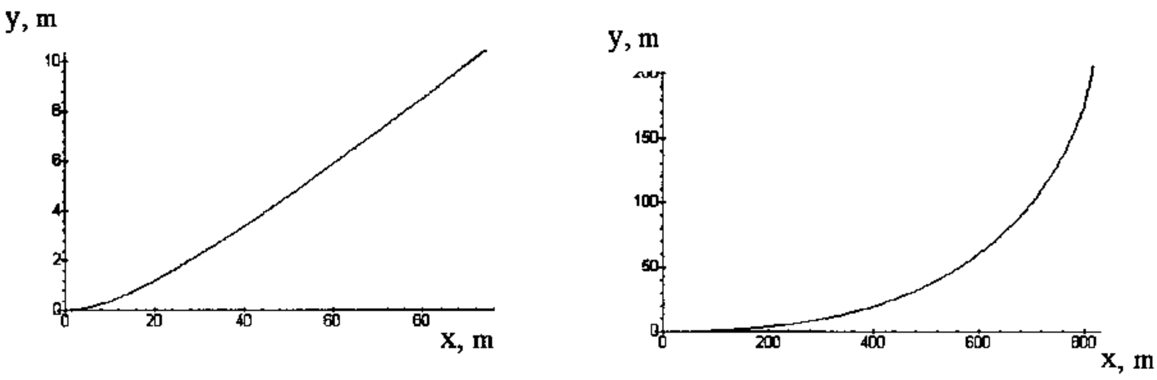
$$\begin{gathered} \lambda^2 + p\lambda + q = 0; \\ p = \frac{1}{V}\left(\frac{k_1+k_2}{m} + \frac{k_1a^2+k_2b^2}{J}\right); \\ q = \frac{k_1k_2l^2 - mV^2\left(k_1a-k_2b\right)}{mJV^2}. \end{gathered} \tag{4}$$

Так как $p>0$, то условием устойчивости является $q>0$. Следовательно, для случая $k_1a > k_2b$ (автомобиль с избыточной поворачиваемостью) стационарное прямолинейное движение автомобиля асимптотически устойчиво лишь при скоростях, не превышающих критическое значение $V_{кр}$

$$V_{кр}^2 = \frac{k_1k_2l^2}{m\left(k_1a-k_2b\right)} = \frac{kk_1kk_2}{kk_1-kk_2}gl, \tag{5}$$

где $kk_i = \dfrac{k_i}{Z_i}$ – безразмерные коэффициенты бокового увода.

Для случая $k_1 a < k_2 b$ (автомобиль с недостаточной поворачиваемостью) прямолинейное движение автомобиля асимптотически устойчиво при любой скорости движения. На рис. 2 представлены возможные траектории, отвечающие возмущенным движениям центра масс автомобиля при докритических и закритических скоростях. При докритических скоростях возмущенное движение (без коррекции со стороны водителя - руль закреплен в нейтральном положении) с течением времени становится прямолинейным (рис. 2а), т.е. возмущения - поперечная составляющая скорости центра масс и угловая скорость движения автомобиля относительно вертикальной оси стремятся к нулю. При закритических скоростях возмущения не затухают, т.е. возмущенное движение не стремится вернуться к прямолинейному (невозмущенному) движению (рис. 2б).



а б

Рис. 2. Траектории, отвечающие возмущенным движениям центра масс автомобиля

Целью работы является разработка альтернативного подхода к определению условий безопасной потери устойчивости прямолинейного режима движения (в смысле Н.Н. Баутина) модели двухосного экипажа с избыточной поворачиваемостью.

Результаты исследования. Потеря путевой устойчивости прямолинейного движения - частный и наиболее простой для анализа случай потери устойчивости круговых стационарных движений достаточно большого радиуса (соответствующая матрица линейного приближения может быть получена непосредственно из исходной системы уравнений движения и определены условия наличия нулевого собственного значения).

Система уравнений, определяющая множество стационарных режимов достаточно большого радиуса, представлена приближенно в виде (6) (с точностью до членов третьего порядка малости)

$$-\frac{mv^2(\delta_2-\delta_1)}{l}+k_2\delta_2-\frac{1}{2}\frac{k_2^3\delta_2^3}{\kappa_2^2 Z_2^2}+k_1\delta_1-\frac{1}{2}\frac{k_1^3\ \delta_1^3}{\kappa_1^2\ Z_1^2}=0;$$
$$a\left(k_1\delta_1-\frac{1}{2}\frac{k_1^3\ \delta_1^3}{\kappa_1^2\ Z_1^2}\right)-b\left(k_2\delta_2-\frac{1}{2}\frac{k_2^3\ \delta_2^3}{\kappa_2^2\ Z_2^2}\right)=0. \qquad (6)$$

Оценка числа решений системы (6) при докритическом значении параметра скорости и при закритическом значении позволяет определить условия опасной-безопасной потери устойчивости прямолинейного стационарного режима движения экипажа.

Система (6) может быть сведена к одному определяющему уравнению третьей степени

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{kk_1^3}{\kappa_1^2}+\frac{1}{2}\frac{kk_2 lkk_1^3 g}{\kappa_1^2 v^2}+\frac{1}{2}\frac{kk_2^3\left(1+\dfrac{glkk_1}{v^2}\right)^3}{\kappa_2^2}\right)\delta_l^{\,3}+\left(kk_1-kk_2\left(1+\frac{glkk_1}{v^2}\right)\right)\delta_l=0. \qquad (7)$$

Из анализа знаков коэффициентов определяющего уравнения (7) при докритической и закритической скоростях, находим условия безопасной потери устойчивости прямолинейного стационарного режима

$$kk_2 < kk_1; \quad kk_1\kappa_1^2 < kk_2\kappa_2^2.$$

Графически реализация кратных стационарных режимов нелинейной модели автомобиля представлена на рис. 3а. При $V < V_{kp}$ в малой окрестности точки ($0, 0$) нет особых точек: начало координат - изолированная особая точка, а индекс Пуанкаре начала координат при $V < V_{kp}$ равен 1. При $V = V_{kp}$ в начале координат рождается кратная особая точка. При $V > V_{kp}$ в окрестности начала координат имеются две "подвижные" особые точки - в первом и третьем квадрантах. Поскольку индекс начала координат при $V > V_{kp}$ равен -1 (седло), то индекс каждой подвижной точки равен 1 (суммарный индекс Пуанкаре остается неизменный при любых значениях параметров). Устойчивость этих стационарных состояний определяется знаком коэффициентов характеристического уравнения:

$$p = -\left[div\left(f_1, f_2\right)\right]_x; \quad q = \left\| \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \right\|_{x^*}. \tag{8}$$

Так как

$$p = -\left[div\left(f_1, f_2\right)\right]_{(0,0)} = \frac{1}{V}\left(\frac{k_1 + k_2}{m} + \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2}{J}\right), \tag{9}$$

то в силу непрерывности $p>0$ в некоторой малой окрестности начала координат.

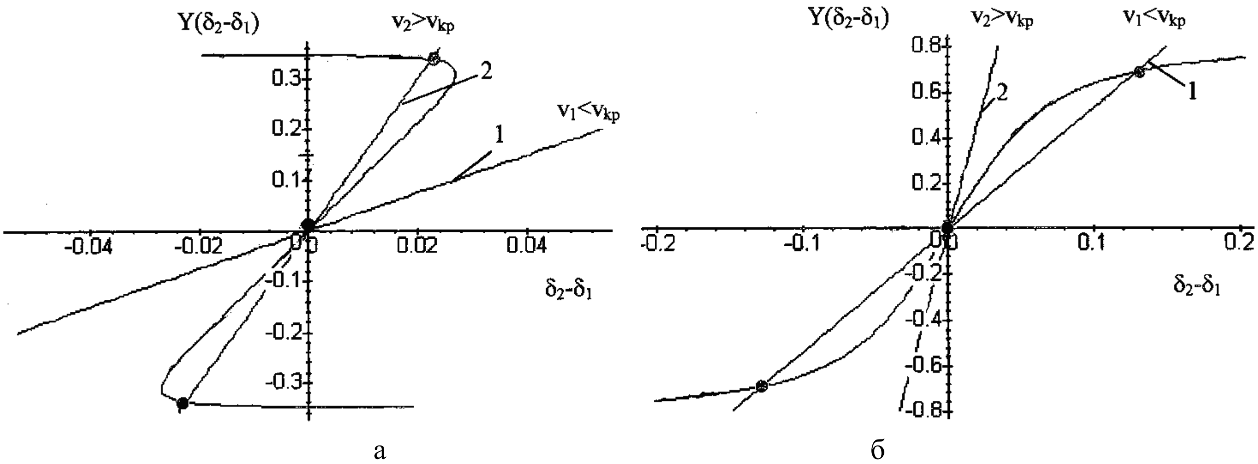
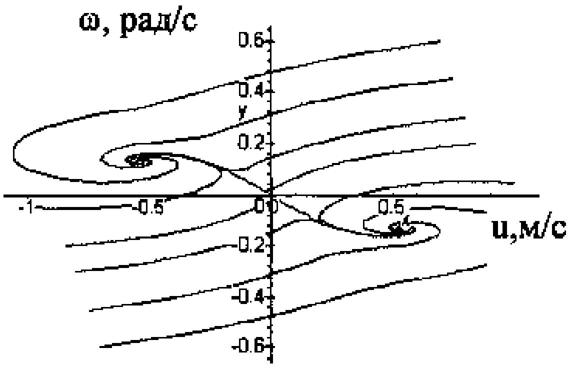


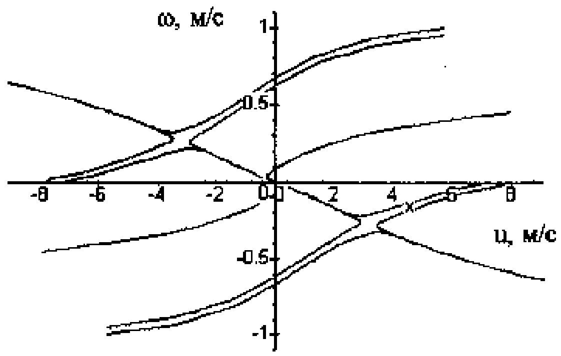
Рис. 3. – Графическое отображение реализации кратных стационарных режимов нелинейной модели автомобиля

Таким образом, хотя начало координат – неустойчивая особая точка (седло), возмущения не превышают некоторой конечной величины (рис.3а). Поскольку значениям $\delta_1^* = const, \delta_2^* = const$, отвечают $\omega_1^* = const, \omega_2^* = const$, то после потери устойчивости прямолинейного движения экипаж описывает на плоскости дороги xy одну из двух окружностей, соответствующих точкам u^*, ω^*.

Рассмотрим бифуркацию слияния особых точек. Этому случаю соответствует рис. 3б. При $V<V_{kp}$ начало координат имеет индекс 1, и существуют две подвижные особые точки. При $V=V_{kp}$ эти подвижные особые точки сливаются в начале координат. При $V>V_{kp}$ единственная особая точка (в начале координат) является седлом (поэтому сумма всех особых точек при $V<V_{kp}$ равна - 1). Подвижные точки являются седловыми. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 4



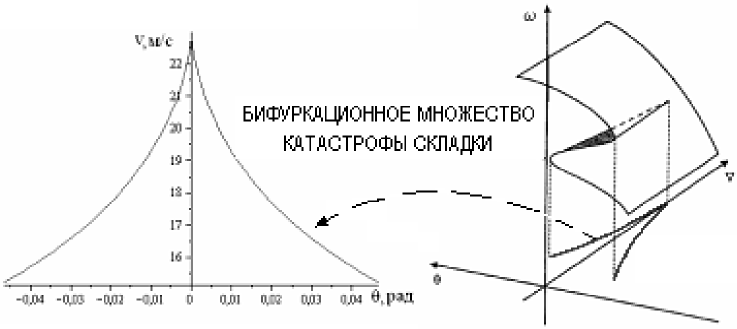
а



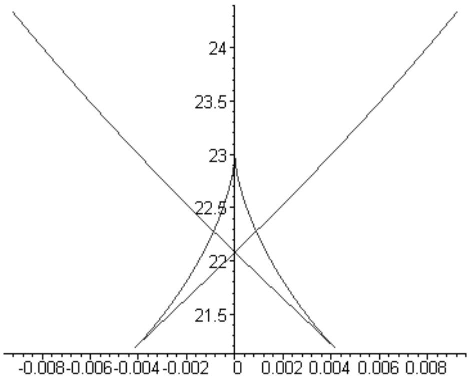
б

Рис.4. – Фазовые портреты

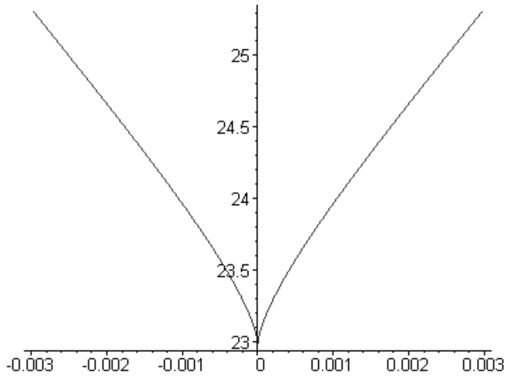
Рисунок 5 иллюстрирует влияние на бифуркационное множество определяющего параметра ($\kappa_1 = 0,75$, рис. 5а; $\kappa_1 = 0,65$, рис. 5б): при уменьшении $\kappa_1, \left(\kappa_1^o = \kappa_2^o = 0,8\right)$ в бифуркационном множестве появляются дополнительные «каспы», которые при критическом значении $\kappa_1 = \kappa_1^*$ сливаются с симметричным, меняя опасный характер потери устойчивости прямолинейного движения на безопасный (при $\kappa_1 < \kappa_1^*; \kappa_1^* = \kappa_2^0 \left(\frac{kk_2}{kk_1}\right)^{\frac{1}{2}} > 0,65$ имеет место безопасная потеря устойчивости прямолинейного движения).



а



б



в

Рис. 5. – Изменение конфигурации бифуркационного множества при уменьшении φ_1

Выводы. Необходимым условием безопасной потери устойчивости прямолинейного движения двухосной модели автомобиля с избыточной поворачиваемостью является требование – коэффициент сцепления задней оси в поперечном направлении должен превышать коэффициент сцепления на передней оси.

1. Певзнер Я.М. Теория устойчивости автомобиля / Я.М. Певзнер. – М.: Машгиз, 1947. – 156с.
2. Литвинов А.С. Автомобиль: теория эксплуатационных свойств / А. С. Литвинов, Я. Е. Фаробин. - М.: Машиностроение, 1989. – 240 с.
3. Антонов Д.А. Теория устойчивости движения многоосных автомобилей / Д.А. Антонов. М.: Машиностроение, 1978. - 216с
4. Pacejka H.B. (2012). Tire and Vehicle Dynamics, 3rd Edition. / H.B. Pacejka. – Butterworth-Heinemann is imprint of Elsevier, 672 p.
5. Troger H (1991). Nonlinear stability and bifurcation theory. / H. Troger, A. Steindl. – Wien, New York: Springler – Verlag, 408 p.
6. Kacani V., Stribersky A., Troger H. (1988). Maneuverability of a truck–trailer combination after loss of lateral stability // V. Kacani, A. Stribersky, H. Troger. – Vehicle Syst. Dyn.– 17, Suppl.–186-190.
7. Zeman K. (1992). Ermittlung der Lцsungsverzweigungen eines Sattelscheieppers dei stationдrer Kurvenfahrt // Z. angew Math. Und. Mech. – **62.** №4. – P. 98 – 100.
8. Лобас Л. Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин / Л. Г. Лобас, В. Г. Вербицкий– Киев: Наукова думка, 1990. - 216 с.
9. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. / Н.Н. Баутин.–"Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1984 – С. 176.

REFERENCES

1. Pevsner, Ja. M. (1947). *Theory of the stability of automobile motion* (In Russian). Leningrad: Masjgiz. 156 p.
2. Litvinov, A. & Farobin Ya. (1989), *Vehicle: the theory of operational properties* [Avtomobil: teoriya ekspluatatsionnykh svoystv], Mashinostroenie, Moscow, 240 p.
3. Antonov, D. (1978). *The theory of motion stability of multiaxial vehicles.* [Teoriya ustoichivosti dvizheniya mnogoosnykh avtomobilei]. Moscow, Mashinostroenie Publ. 216 p
4. Pacejka, H.B. (2012). *Tire and Vehicle Dynamics*, 3rd Edition. / H.B. Pacejka. – Butterworth-Heinemann is imprint of Elsevier, 672 p.
5. Troger, H (1991). *Nonlinear stability and bifurcation theory.* / H. Troger, A. Steindl. – Wien, New York: Springler – Verlag, 408 p.
6. Kacani, V., Stribersky A., Troger H. (1988). Maneuverability of a truck–trailer combination after loss of lateral stability. *Vehicle Syst.* Dyn.– 17, Suppl.–186-190.
7. Zeman, K. (1992). Ermittlung der Lцsungsverzweigungen eines Sattelscheieppers dei stationдrer Kurvenfahrt // Z. angew *Math. Und. Mech.* – **62.** №4. – P. 98 – 100.
8. Lobas, L. (1990). *Qualitative and analytical methods in the dynamics of wheeled vehicles* [Kachestvennye i analiticheskie metody v dinamike kolesnykh mashin], Naukova Dumka, Kyiv, 216 p.
9. Bautin, N. N. (1984). *Behaviour of Dynamical Systems near the Boundary of the Stability Domain.* Nauka, Moscow, 1984. 176 p.

Хребет В.Г., Вербицький В.Г., Банніков В.О., Вельмагіна Н.О. **Побудова біфуркаційної множини моделі двоосного автомобіля.**

Розглянуто альтернативний підхід до визначення умов безпечної втрати стійкості(в сенсі М.М. Баутіна) прямолінійного стаціонарного режиму руху моделі двохосного екіпажу з надлишковою повороткістю, що базується на геометричній картині механізму дивергентної втрати стійкості. Сили відведення як функції кутів відведення представлені з точністю до кубічних членів. Умови безпечної втрати стійкості залежать від співвідношення між коефіцієнтами опору відведення та коефіцієнтами зчеплення в поперечному напрямі на осях.

Ключові слова: автомобіль, коефіцієнт відведення, коефіцієнт зчеплення, стійкість руху, дивергентні біфуркації.

V. Khrebet, V. Verbitskiy, V. Bannikov, N. Velmagina. **Building the bifurcation set of a two-axes vehicle model.**

An alternative approach is considered to determination of the conditions of safe stability loss for rectilinear stationary motion of an oversteered (in the sense of M. Bautin) two-axes vehicle model. The approach is based on a geometrical representation of the divergent stability loss mechanism. The slipping forces as functions of slipping angles are presented with an accuracy to a cubic term. The safe stability loss conditions depend on the ratio between the slipping resistance coefficients and the clutch coefficients in the transverse direction of the axes.

Keywords: car, slipping coefficient, clutch coefficient, motion stability, divergent bifurcations.

АВТОРИ:

ХРЕБЕТ Валерій Григорович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри ”Базові і спеціальні дисципліни” інституту доуніверситетської підготовки, Національний авіаційний університет, e-mail: adipmi@gmail.com

ВЕРБИЦЬКИЙ Володимир Григорович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри ”Залізнична колія та колійне господарство”, Київський державний еіКономіко – технологічний університет транспорту, e-mail: oxsi@bigmir.net

БАННІКОВ Валерій Олександрович, кандидат технічних наук, доцент кафедри ”Автомобілі”, Запоріжський Національний транспортний університет, e-mail: valeriy_bannikov@mail.ru

ВЕЛЬМАГІНА Наталія Олександрівна, старший викладач кафедри ”Прикладна математика”*,* Придніпровська державна академія будівництва і архітектури, Дніпропетровськ, e-mail: avto@lntu.edu.ua

АВТОРЫ:

ХРЕБЕТ Валерий Григорьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ”Базовые и специальные дисциплины” института доуниверситетской подготовки, Национальный авиационный университет, e-mail: adipmi@gmail.com

ВЕРБИЦКИЙ Володимир Григорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры ”Железнодорожный путь и путевое хозяйство”, Киевский государственный экономико-технологический университет транспорта, e-mail: oxsi@bigmir.net

БАННИКОВ Валерий Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры ”Автомобили»”, Запорожский Национальный транспортный университет, e-mail: valeriy_bannikov@mail.ru

ВЕЛЬМАГИНА Наталия Александровна, старший преподаватель кафедры ”Прикладная математика”*,* Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Днепропетровск, e-mail: avto@lntu.edu.ua

AUTHORS:

Valeriy KHREBET Ph.D. in Mathematics, Associate Professor of Department of Fundamental and Special Disciplines of Institute of Pre – University. National Aviation National Aviation University, Kyiv, Ukraine.

Volodymyr VERBYTSKIY Ph.D. in Mathematics, Professor of Department "Railroad and travel industry", State Economy and Technology University of Transport, Kiev, Ukraine.

Valeriy BANNIKOV Ph.D. in Engineering, Associate Professor of Transport of Automobiles Department, National Technical University, Zaporizhzhya, Kyiv, Ukraine.

Nataliya Velmagina the Senior Lecturer of Department of Applied mathematics Prydneprovs’ka State Academy of civil Engineering and Architecture, Dnipropetrovsk, Kyiv, Ukraine. velmagina@yandex.ua

Стаття надійшла в редакцію 14.04.2016р