

Пустюльга С.І., Самостян В.Р., Хомич А.А.  
*Луцький національний технічний університет*

## ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ СІТОК ІЗ ЗАДАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ НА ТРИКУТНОМУ ПЛАНІ СУПЕРПОЗИЦІЄЮ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

У роботі запропоновано спосіб формування відсіків зрівноважених дискретно представлених криволінійних поверхонь із трикутним планом за допомогою суперпозиції подвійних числових послідовностей. Розроблений математичний алгоритм дозволяє формувати зрівноважені дискретні криволінійні сітки без розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь рівноваги статико-геометричного методу професора С.М. Ковальова, забезпечує абсолютне виконання заданих крайових умов, знімає проблеми згущення вузлів дискретних сіток до досягнення заданої точності, відкриває можливість швидкого переходу від дискретних моделей двовимірних образів до їх неперервних аналогів.

**Ключові слова:** дискретно представлені поверхні, трикутний план, суперпозиція, подвійні числові послідовності, статико-геометричний метод, згущення дискретних сіток.

**Постановка проблеми.** Цілий ряд наукових робіт вчених, що працюють у галузі дискретного моделювання технічних об'єктів зі складною геометрією, присвячені узагальненню статико-геометричного методу формування зрівноважених структур довільної розмірності проф. С.М. Ковальова [1], розширенню його можливостей для вирішення практичних завдань, дослідженням взаємозв'язку даного методу із побудовою моделей тих же образів за допомогою математичного апарату числових послідовностей [2].

І статико-геометричний метод, і метод дискретного моделювання зрівноважених криволінійних об'єктів математичним апаратом числових послідовностей має свої переваги та недоліки. При побудові дискретних моделей криволінійних образів довільного числа вимірів статико-геометричним методом виникають проблеми розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь, точності представлення геометричних об'єктів, згущення каркасів, швидкого переходу до неперервного представлення модельованих форм і т.і. При дискретному моделюванні зрівноважених образів довільної розмірності числовими послідовностями виникають проблеми забезпечення виконання вихідних умов формування, зокрема врахування у створюваній моделі однозначно заданого опорного контуру. Тому пошук ефективних алгоритмів дискретного представлення зрівноважених сіток числовими послідовностями з довільними крайовими умовами та довільною конфігурацією плану поверхонь є актуальним завданням для досліджень.

**Аналіз останніх досліджень.** Питанням розробки алгоритмів дискретного формування зрівноважених двовимірних структур за допомогою математичного апарату числових послідовностей були присвячені роботи [2, 3, 5]. У них було доведено, що при формуванні образів розмірністю два на чотирикутному плані однією двовимірною числовою послідовністю, не можливо абсолютно точно забезпечити виконання крайових умов та інших вихідних даних. Це пов'язано із тим, що у загальному випадку “природа” двовимірного скінчено-різницевого оператора, тобто обчислювального шаблону, який лежить в основі виведення виразу подвійної числової послідовності, що є моделлю тієї чи іншої сітки, не завжди відповідає довільно вибраним крайовим умовам. В наступних роботах [4, 6, 7] були запропоновані ефективні алгоритми дискретного формування зрівноважених двовимірних образів на чотирикутних планах за допомогою комплексу подвійних числових, а сам процес моделювання полягав у підборі та суперпозиції останніх. Це дало можливість суттєво спростити процеси моделювання зрівноважених дискретно представлених поверхонь, швидко коригувати геометрію формованих образів, ефективно управляти процесами формування.

Однак залишається актуальним завдання розробки підходів до побудови зрівноважених дискретних моделей поверхонь за допомогою математичного апарату числових послідовностей із абсолютним врахуванням довільно заданих крайових умов на планах, відмінних від чотирикутного. Такі дослідження з одного боку дадуть можливість подальшого узагальнення методу моделювання дискретно визначених поверхонь числовими послідовностями, а з іншого – суттєво розширять спектр практичного застосування розроблюваних способів.

**Мета роботи.** Метою даної роботи є розробка способу формування відсіків зрівноважених дискретно представлених криволінійних поверхонь із трикутним планом за допомогою суперпозиції подвійних числових послідовностей, а також ефективних алгоритмів моделювання таких двовимірних образів в середовищі **Mathcad**.

**Основна частина.** Крайові умови модельованої дискретно представленої поверхні на трикутному плані, у загальному вигляді, можуть бути представлені або масивами координат, або як дискретні моделі параметрично заданих кривих у тривимірному просторі. Тоді при заданій кількості вузлів формованої сітки їх можна описати одновимірними числовими послідовностями, відповідно до узгоджених параметрів дискретизації (рис. 1), у вигляді:

$$\begin{aligned} X_{A,B} &= a_{x0} + a_{x1}k + a_{x2}k^2 + \dots a_{xs}k^s, & X_{A,C} &= c_{x0} + c_{x1}m + c_{x2}m^2 + \dots c_{xs}m^s, \\ Y_{A,B} &= a_{y0} + a_{y1}k + a_{y2}k^2 + \dots a_{ys}k^s, & Y_{A,C} &= c_{y0} + c_{y1}m + c_{y2}m^2 + \dots c_{ys}m^s, \\ Z_{A,B} &= a_{z0} + a_{z1}k + a_{z2}k^2 + \dots a_{zs}k^s, & Z_{A,C} &= c_{z0} + c_{z1}m + c_{z2}m^2 + \dots c_{zs}m^s, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} X_{B,C} &= b_{x0} + b_{x1}n + b_{x2}n^2 + \dots b_{xs}n^s, \\ Y_{B,C} &= b_{y0} + b_{y1}n + b_{y2}n^2 + \dots b_{ys}n^s, \\ Z_{B,C} &= b_{z0} + b_{z1}n + b_{z2}n^2 + \dots b_{zs}n^s. \end{aligned}$$

При такому дискретному задаванні крайових умов на трикутному (*ABC*) у плані опорному контурі, математичну модель майбутнього зрівноваженого дискретно формованого об'єкта достатньо легко описати системою лінійних рівнянь рівноваги вузлів статико-геометричного методу виду:

$$\begin{cases} X_{i,j+1} + X_{i+1,j} + X_{i-1,j} + X_{i,j-1} - 4 \cdot X_{i,j} + kP^x_{i,j} = 0 \\ Y_{i,j+1} + Y_{i+1,j} + Y_{i-1,j} + Y_{i,j-1} - 4 \cdot Y_{i,j} + kP^y_{i,j} = 0 \\ Z_{i,j+1} + Z_{i+1,j} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} - 4 \cdot Z_{i,j} + kP^z_{i,j} = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

результатом розв'язку якої будуть масиви складових координат вузлів формованої під навантаженням ( $P^x_{i,j}, P^y_{i,j}, P^z_{i,j}$ ) дискретно представленої поверхні на трикутному в плані опорному контурі.

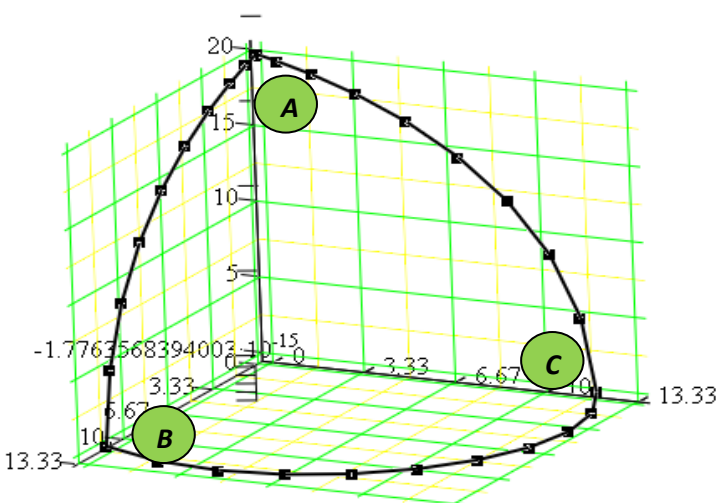


Рис.1. Заданий опорний контур дискретної моделі

Однак, це тільки масиви координат, які не можуть дати жодної інформації про геометрію сформованої дискретної моделі, про точність представлення, про потребу та можливість згущення вузлів сітки для досягнення поставлених вимог. Всі ці проблеми будуть зняті, якщо знайти спосіб представлення процесу такого дискретного формоутворення за допомогою комплексу подвійних числових послідовностей, поданих у замкнутому вигляді.

Ідея роботи полягає у правильному підборі комплексу потрібних подвійних числових послідовностей для їх подальшої суперпозиції.

Звернемося до геометричного трактування можливих способів

розв'язання такої задачі. Процес формоутворення дискретної моделі криволінійної поверхні на трикутному плані із заданими крайовими умовами можна представити як суперпозицію циліндроїда,

конуса і площини або, що більш на наш погляд раціонально, як суперпозицію трьох конусів і площини побудованої на вершинах названих конічних поверхонь. Проблема вирішується при застосуванні адекватних числових послідовностей для представлення кожної із складових вказаної суперпозиції. Така можливість може бути реалізована коли використати підхід до представлення послідовностями процесу формування поверхонь Кунса тільки з певними варіаціями типу “сторона-вершина” на трикутнику [8].

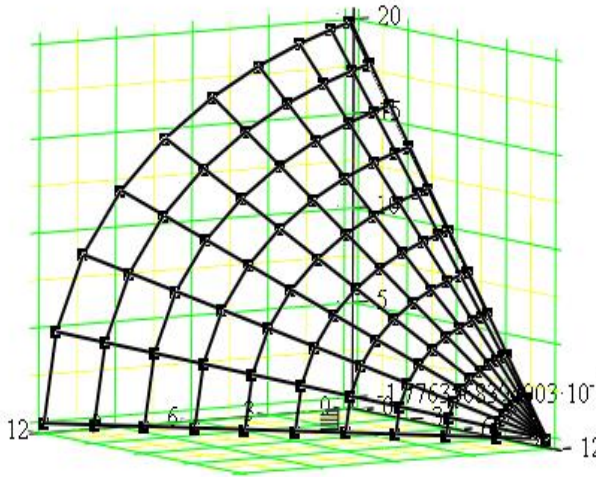


Рис. 2. Дискретна модель конічної поверхні з вершиною **C**

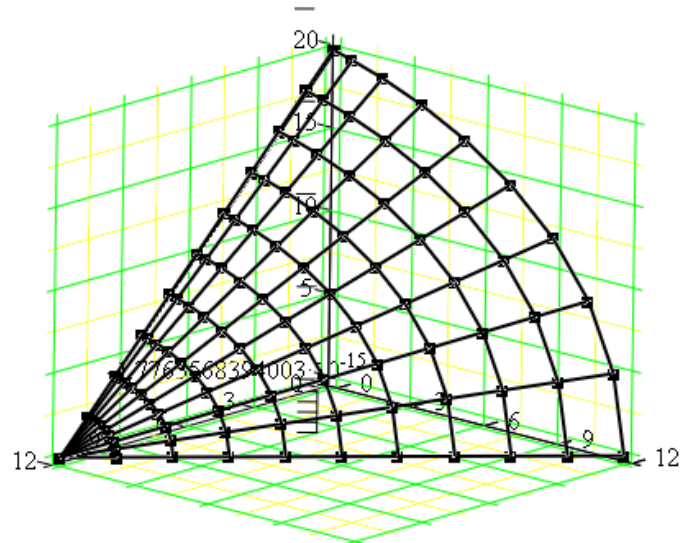


Рис. 3. Дискретна модель конічної поверхні з вершиною **B**

Відповідно до цього, першу дискретно представлену конічну поверхню з направляючою **AB** і вершиною **C** сформуємо за допомогою системи числових послідовностей виду (3), (рис. 2).

$$(3) \quad \begin{cases} X1_{n,k} = (c_{x0} + c_{x1}k) \frac{n}{N-1} + (a_{x0} + a_{x1}k + a_{x2}k^2 + \dots a_{xs}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \\ Y1_{n,k} = (c_{y0} + c_{y1}k) \frac{n}{N-1} + (a_{y0} + a_{y1}k + a_{y2}k^2 + \dots a_{ys}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \\ Z1_{n,k} = (c_{z0} + c_{z1}k) \frac{n}{N-1} + (a_{z0} + a_{z1}k + a_{z2}k^2 + \dots a_{zs}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \end{cases}$$

Дискретна модель такої лінійчатої поверхні абсолютно точно забезпечить виконання крайової умови **AB**. Для забезпечення виконання крайової умови **AC** скористаємося системою числових послідовностей виду:

$$(4) \quad \begin{cases} X2_{n,k} = (b_{x0} + b_{x1}k) \frac{n}{N-1} + (c_{x0} + c_{x1}k + c_{x2}k^2 + \dots c_{xs}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \\ Y2_{n,k} = (b_{y0} + b_{y1}k) \frac{n}{N-1} + (c_{y0} + c_{y1}k + c_{y2}k^2 + \dots c_{ys}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \\ Z2_{n,k} = (b_{z0} + b_{z1}k) \frac{n}{N-1} + (c_{z0} + c_{z1}k + c_{z2}k^2 + \dots c_{zs}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \end{cases}$$

результатом обчислень якої буде дискретна модель конічної поверхні наведеної на рис. 3.

Система числових послідовностей виду

$$\begin{cases} X3_{n,k} = (a_{x0} + a_{x1}k) \frac{n}{N-1} + (b_{x0} + b_{x1}k + b_{x2}k^2 + \dots b_{xs}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \\ Y3_{n,k} = (a_{y0} + a_{y1}k) \frac{n}{N-1} + (b_{y0} + b_{y1}k + b_{y2}k^2 + \dots b_{ys}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \\ Z3_{n,k} = (a_{z0} + a_{z1}k) \frac{n}{N-1} + (b_{z0} + b_{z1}k + b_{z2}k^2 + \dots b_{zs}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \end{cases} \quad (5)$$

Буде задавати дискретну модель третьої конічної поверхні з направляючою  $BC$ , наочне зображення якої наведено на рис. 4.

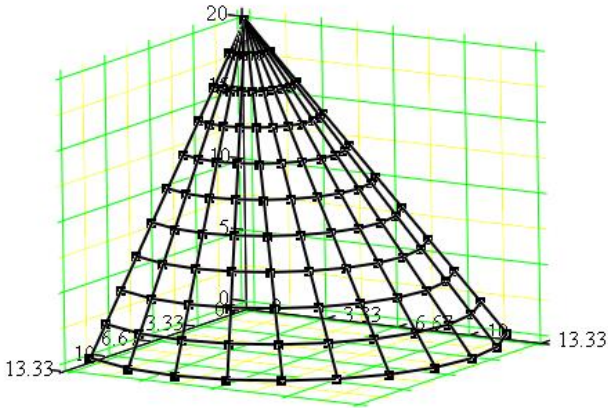


Рис. 4. Дискретна модель конічної поверхні з вершиною  $A$

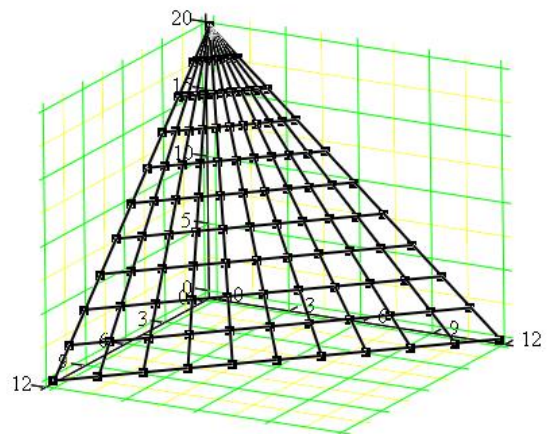


Рис. 5. Дискретна модель площини, побудованої на вершинах  $A, B, C$

Ще одним необхідним базовим елементом побудови дискретної моделі криволінійної поверхні на заданому опорному контурі є система подвійних числових послідовностей виду:

$$\begin{cases} X4_{n,k} = (a_{x0} + a_{x1}k) \frac{n}{N-1} + (b_{x0} + b_{x1}k) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \\ Y4_{n,k} = (a_{y0} + a_{y1}k) \frac{n}{N-1} + (b_{y0} + b_{y1}k) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \\ Z4_{n,k} = (a_{z0} + a_{z1}k) \frac{n}{N-1} + (b_{z0} + b_{z1}k) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \end{cases}, \quad (6)$$

яка описує дискретну модель відсіку площини (рис. 5), побудованої на кутових точках  $(ABC)$  опорного контуру (рис. 1).

Результуючу дискретну модель формованої поверхні, яка абсолютно точно забезпечить виконання заданих крайових умов, можна подати за допомогою суперпозиції сформованих базових подвійних числових послідовностей (3), (4), (5), (6) у вигляді системи (рис. 6):



$$\begin{cases}
 XS_{n,k} = (c_{x0} + c_{x1}k) \frac{n}{N-1} + (a_{x0} + a_{x1}k + a_{x2}k^2 + \dots + a_{xs}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) + \\
 (b_{x0} + b_{x1}k) \frac{n}{N-1} + (c_{x0} + c_{x1}k + c_{x2}k^2 + \dots + c_{xs}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) + \\
 (a_{x0} + a_{x1}k) \frac{n}{N-1} + (b_{x0} + b_{x1}k + b_{x2}k^2 + \dots + b_{xs}k^s) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) - \\
 2((a_{x0} + a_{x1}k) \frac{n}{N-1} + (b_{x0} + b_{x1}k) \left(1 - \frac{n}{N-1}\right)) \\
 YS_{n,k} = Y1_{n,k} + Y2_{n,k} + Y3_{n,k} - 2Y4_{n,k} \\
 ZS_{n,k} = Z1_{n,k} + Z2_{n,k} + Z3_{n,k} - 2Z4_{n,k}
 \end{cases} \quad (7)$$

де  $n$  і  $k$  – нумерація членів подвійних числових послідовностей.

При заданих коефіцієнтах у (7) дискретна модель криволінійної поверхні будується для будь-яких комбінацій  $n$  і  $k$ . Однак вузли дискретної сітки такої моделі не знаходяться у рівновазі, відповідно до основних положень статико-геометричного методу формоутворення.

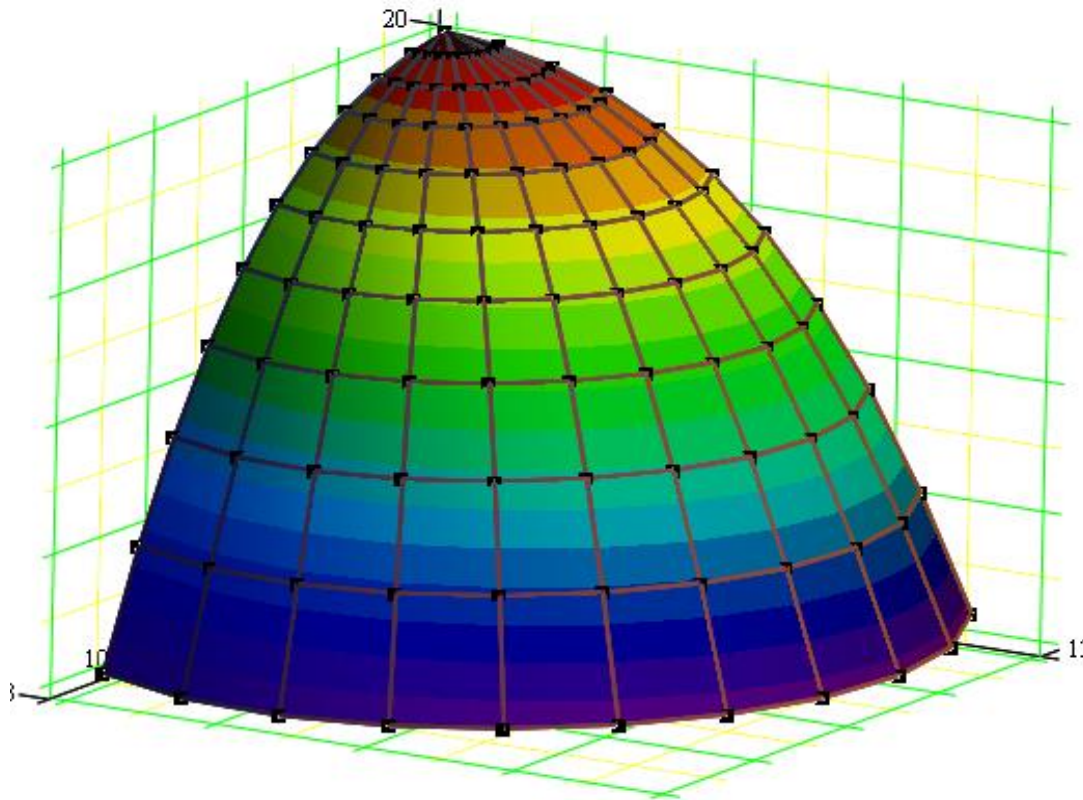


Рис. 6. Суперпозиція базових дискретних моделей

Для приведення до рівноваги вузлів дискретної моделі, формованої на заданому опорному контурі криволінійної поверхні, необхідно із (7) виокремити координатні складові функції зовнішнього формоутворюючого навантаження, що діє на вузли сітки. Для цього треба визначитись із коефіцієнтами скінченно-різницевого оператора, що лежать в основі побудованої статико-геометричним методом моделі, тобто коефіцієнтами відповідних обчислювальних шаблонів.

Наприклад, нехай в основі формування нашої зрівноваженої сітки лежить шаблон (2). Тоді для встановлення рівноваги вузлів дискретної моделі криволінійної поверхні з нерівномірним кроком вузлів, описаної системою подвійних числових послідовностей (7), достатньо до координатних складових вузлів у лінійній системі скінченно-різницевого рівнянь (2) статико-геометричного методу прикласти складові функціонального навантаження виду:

$$\begin{cases} Px_{n,k} = 4XS_{n,k} - XS_{n-1,k} - XS_{n+1,k} - XS_{n,k-1} - XS_{n,k+1} \\ Py_{n,k} = 4YS_{n,k} - YS_{n-1,k} - YS_{n+1,k} - YS_{n,k-1} - YS_{n,k+1} \\ Pz_{n,k} = 4ZS_{n,k} - ZS_{n-1,k} - ZS_{n+1,k} - ZS_{n,k-1} - ZS_{n,k+1} \end{cases} \quad (8)$$

Дискретна модель (7), (8) є абсолютно точною, для сформованого образу відсутня проблема згущення сітки до досягнення заданої точності. Крім того, дана геометрична модель є “ідеалом” або мірилом точності для будь-яких дискретно представлених зрівноважених сіток, побудованих на заданому опорному контурі. При необхідності переходу дискретної моделі (7) до її неперервного аналога достатньо дискретні параметри  $n$  і  $k$  замінити на неперервні  $x$  та  $y$ .

**Висновки.** У роботі запропоновано спосіб формування відсіків зрівноважених дискретно представлених криволінійних поверхонь із трикутним планом за допомогою суперпозиції подвійних числових послідовностей. Розроблений математичний алгоритм дозволяє формувати зрівноважені дискретні криволінійні сітки без розв’язання громіздких систем лінійних рівнянь рівноваги статико-геометричного методу професора С.М. Ковальова, забезпечує абсолютне виконання заданих крайових умов, знімає проблеми згущення вузлів дискретних сіток до досягнення заданої точності, відкриває можливість швидкого переходу від дискретних моделей двовимірних образів до їх неперервних аналогів.

1. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дисс. докт. техн. наук. – М., 1986. – 348 с.

2. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об’єктів числовими послідовностями. Дис....докт. техн. наук. 05.01.01. / К.: КНУБА, 2006. – 320с.

3. Пустюльга С.І., Самчук В.П., Клак Ю.В. Стикування дискретно представлених ділянок криволінійних поверхонь із заданим порядком гладкості за допомогою операцій над матрицями Науковий журнал “Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті” – Луцьк: Луцький НТУ, 2014. - Вип. 2. - С. 104-111.

4. Пустюльга С.І., Самостян В.Р., Хомич А.А. Дискретне моделювання зрівноважених криволінійних сіток, з нерівномірним кроком вузлів, суперпозицією подвійних числових // Прикладна геометрія та інженерна графіка”: Зб. наук. пр. - К., 2013. - Вип. 91. – С. 219-225.

5. Пустюльга С.І. Формування подвійних числових послідовностей для моделювання ДВП при заданих початкових умовах. // Прикладна геометрія та інженерна графіка.- К., 2005, вип.75, с. 146-151.

6. Пустюльга С.І., Самостян В.Р. Вплив крайових умов на формування зрівноважених двовимірних образів числовими послідовностями.- Прикладна геометрія та інженерна графіка. К., 2008, вип.79, с. 57-62.

7. Пустюльга С.І., Самостян В.Р. Моделювання зрівноважених дискретно представлених криволінійних поверхонь із заданими крайовими умовами числовими послідовностями. - Прикладна геометрія та інженерна графіка”: - К., 2009. - Вип. 82. – С. 208-214.

8. Малоземов В.Н. Избранные главы дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования.//Санкт-Петербургский государственный университет., 2009. – 584с.

## REFERENCES

1. Kovalov S. Formation of discrete models of surfaces of spatial architectural structures. Diss. Doct. of Tech. Science. - M., 1986. - 348 p.

2. Pustulha S. Discrete definition of geometric objects by means of numerical sequences. Diss. Dokt. Of Tech. Science. 05.01.01. / K.: KNUCA, 2006. - 320p.

3. Pustulha S., Samchuk V., Klak Y. Docking of discretely represented sections of curved surfaces with the indicated order of smoothness by means of operations on matrices. Scientific journal "Advances in Mechanical Engineering and Transport" - Lutsk NTU, 2014. - Vol. 2. - P. 104-111

4. Pustulha S., Samostian V., Khomych A. Discrete modelling of balanced curvilinear grids, with irregular steps of units by means of double numerical sequences superposition // Applied geometry and engineering graphics ": Coll. Science. pr. - K., 2013. - Vol. 91. - P. 219-225

5. Pustulha S. Formation of double numerical sequences for modeling the discretely indicated surfaces by given initial conditions. // Applied geometry and engineering graphics.- K., 2005, vyp.75, p. 146-151.

6. Pustulha S., Samostian V. Influence of boundary conditions on the formation of a balanced two-dimensional images by numerical sequences. - Applied geometry and engineering graphics. K., 2008, vol.79, p. 57-62.

7. Pustulha S., Samostian V. Modelling of balanced discretely presented curved surfaces with given boundary conditions of numerical sequences. - Applied geometry and engineering graphics ", - K., 2009. - Vol. 82. - P. 208-214

8. Malozimov V. Select heads of discrete harmonic analysis and geometrical design. // Saint Petersburg state university., 2009. – 584p.

**Пустюльга С.І., Самостян В.Р., Хомич А.А. Дискретное моделирование криволинейных сеток с заданными краевыми условиями на треугольном плане суперпозицией числовых последовательностей.**

В работе предложен способ формирования отсеков равновесных дискретно представленных криволинейных поверхностей с треугольным планом с помощью суперпозиции двойных числовых последовательностей. Разработанный

математический алгоритм позволяет формировать дискретные криволинейные сетки без решения громоздких систем линейных уравнений равновесия статико-геометричного метода профессора С. М. Ковалева, обеспечивает абсолютное выполнение заданных краевых условий, снимает проблемы сгущения узлов дискретных сеток для достижения заданной точности, открывает возможность быстрого перехода от дискретных моделей двумерных образов к их непрерывным аналогам.

**Ключевые слова:** дискретно представленные поверхности, треугольный план, суперпозиция, двойные числовые последовательности, статико-геометричный метод, сгущение дискретных сеток.

***S. Pustiulha, V. Samostian, A. Homich. Discrete modelling of curvilinear grids with the indicated boundary conditions on the triangular design by means of numerical sequences superposition.***

In this paper it is offered the way of forming the balanced parts discretely presented curvilinear surfaces with the triangular design by means of numerical sequences superposition. The developed mathematical algorithm makes possible to form discrete curvilinear grids without solving the huge systems of linear equations of equilibrium of professor Kovalov's statico-geometric method, provides absolute implementation of the indicated boundary conditions, takes off the problems of condensing the knots of discrete grids for achieving the indicated exactness, opens possibility of rapid transition from the discrete models of two-dimensional characters to their continuous analogues.

**Keywords:** discretely presented surfaces, triangular design, superposition, double numerical sequences, statico-geometric method, condensing of discrete grids.

**АВТОРИ:**

*ПУСТЮЛЬГА Сергій Іванович*, доктор технічних наук, професор кафедри інженерної та комп'ютерної графіки, декан МБФ, Луцький національний технічний університет e-mail: [mbf.dec@mail.ru](mailto:mbf.dec@mail.ru).

*САМОСТЯН Віктор Русланович*, кандидат технічних наук, доцент кафедри інженерної та комп'ютерної графіки, Луцький національний технічний університет e-mail: [cvmbf@ukr.net](mailto:cvmbf@ukr.net).

*ХОМИЧ Артем Андрійович*, аспірант кафедри інженерної та комп'ютерної графіки, Луцький національний технічний університет.

**АВТОРЫ:**

*ПУСТЮЛЬГА Сергей Иванович*, доктор технических наук, профессор кафедры инженерной и компьютерной графики, декан МСФ, Луцкий национальный технический университет e-mail: [mbf.dec@mail.ru](mailto:mbf.dec@mail.ru)

*САМОСТЯН Виктор Русланович*, кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной и компьютерной графики, Луцкий национальный технический университет e-mail: [cvmbf@ukr.net](mailto:cvmbf@ukr.net).

*ХОМЫЧ Артем Андреевич*, аспирант кафедры инженерной и компьютерной графики, Луцкий национальный технический университет.

**AUTHORS:**

*Serhii PUSTIULHA*, Doctor of Technical Sciences, Professor of Engineering and Computer Graphics department, Dean of MBF, Lutsk National Technical University e-mail: [mbf.dec@mail.ru](mailto:mbf.dec@mail.ru)

*Viktor SAMOSTIAN*, Ph.D in Engeneering, associate professor of engineering and computer graphics department, Lutsk National Technical University e-mail: [cvmbf@ukr.net](mailto:cvmbf@ukr.net).

*Artem HOMICH*, graduate student of engineering and computer graphics department, Lutsk National Technical University.

Стаття надійшла в редакцію 20.09.2016р.