УДК 624.2

Ткачук С.Г.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАГАЛЬНОГО РОЗМИВУ

Проблема загального розмиву лежить на стику динаміки руслових потоків і теорії руслових процесів. Обґрунтування адекватної математичної моделі супроводжується ускладненнями, які полягають в: структурованості та дискретності руслового процесу; двох фазності руслового потоку; неусталеності руху води із змінною витратою води в руслі вздовж зони впливу мостового переходу; деформаціях вільної поверхні і дна, що обумовлює зміну в часі границь потоку.

З огляду на переважаючу (на порядок і більше) довжину зони впливу мостового переходу в порівнянні з шириною і глибиною русла, задача прогнозування загального розмиву ставиться в одномірній ідеалізації з двома незалежними аргументами: відстанню від початкового створу і часу, відлік якого починається з моменту виходу води на заплави. Таким чином, відмітки дна русла і заплав осереднюються по ширині.

Враховуючи двох фазність руслового потоку, математична модель загального розмиву повинна складатись щонайменше з чотирьох залежностей, відтворюючих умови нерозривності та руху для води і наносів.

Домінантним рівнянням математичної моделі загального розмиву є диференціальне рівняння балансу наносів (деформацій):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial l} \qquad (1)$$

Для русел з нерозмивними берегами це рівняння можна записати в розгорнутому виді

$$\frac{\partial G}{\partial l} + B_p \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

який надає йому зручності в аналітичних перетвореннях, і тому набуло поширеного застосування в практиці інженерних прогнозів руслових деформацій. Рівняння балансу наносів (2) придатне для визначення руслових переформувань в природних умовах і прогнозів деформацій дна при будь-якому стисненні ріки гідротехнічними чи транспортними спорудами. Але при цьому треба мати на увазі два застереження:

- берега русла не повинні руйнуватись потоком;
- на розрахунковій ділянці повинні бути відсутні притоки і бічне надходження наносів через бровки русла.

Якщо друге застереження не справджується, то рівняння балансу наносів треба писати з правою частиною, що не дорівнює нулю, тобто

$$\frac{\partial G}{\partial l} + B\frac{\partial h}{\partial t} = g_{sb} \qquad (3)$$

де g_{sb} - бічна питома витрата наносів, або кількість наносів, яка щосекунди надходить до русла через одиницю його довжини. Практичні задачі з використанням рівняння (3) останнім часом набули актуальності, пов'язаної з прогнозами замулення малих річок і вироблення заходів, які б завадили поширенню цього шкідливого явища.

Рівняння балансу наносів являє собою рівняння нерозривності для твердої фази потоку в нестаціонарному процесі загального розмиву і відображає фундаментальний закон збереження матерії.

Згідно з принципами гідроморфологічної теорії руслового процесу транспортування руслоформуючих донних наносів відбувається на структурному рівні дискретних мезоформ, що являють собою скупчення наносів у вигляді пасм, боковиків, осередків. Їх характерні розміри співставні з глибиною русла і корелюють з розмірами крупномірильних когерентних вихорових структур руслового потоку. Переміщення наносних формувань у вигляді руслових мезоформ відбувається під дією осереднених швидкостей в придонній області. Імпульси турбулентних пульсацій надто слабкі, щоб зрушити всю мезоформу, тому вони стають активними чинниками тільки на рівні окремої частинки наносів або на рівні руслових мікроформ - рифелів.

В турбулентних потоках поздовжня осереднена швидкість на границі придонної області, яка розташована приблизно на рівні гребнів донних пасм, мало відрізняється від середньої швидкості в живому перерізі. Враховуючи цю обставину і виходячи з одновимірної постановки задачі, транспортуюча спроможність потоку ставиться в залежність від середньої швидкості V. Узагальнена структура таких формул має вид

$$G = A\frac{V^m B_p}{h^k}\left(1-\frac{V_0}{V}\right) \tag{4}$$

де: G - транспортуюча спроможність потоку; A = f(d) - функція крупнисті наносів; B_p - ширина русла; h - глибина води в руслі; V_0 - початкова швидкість зрушення наносів; V - швидкість руслового потоку; m та k - показники степені, які за результатами лабораторних і натурних досліджень різних авторів змінюються в дуже вузькому діапазоні (табл. 1, [1])

Таблиця 1

№ п/п	Автори	Рік	m	k
донні				
1	ЦНДІБ	1956	4	0
2	Гончаров В.М.	1938	4	0,5
3	Гончаров В.М.	1954	4	0,4
4	Гончаров В.М.	-	4,33	0,45
5	Леві І.І.	1957	4	0,25
6	Шамов Г.І.	1959	4	0,75
7	Студеничніков Б.І.	1964	4	-0,25
завислі				
8	Леві І.І.	1964	4	0
9	Веліканов М.О.	1951	4	0
10	Єгіазаров І.В.	-	4	0
11	Гостунський О.М.	-	4	0,5
донні + завислі				
12	Лаурсен Е. (дрібні наноси)	1958	5,25	0,87
13	Лаурсен Е. (середні наноси)	-	4	0,67
14	Лаурсен Е. (крупні наноси)	-	3,25	0.54
Середнє без (7)			4,05	0,38
Округлені			4	0,4

В той же час функція крупності наносів А у різних авторів може відрізнятися в декілька разів. Пояснення таких розбіжностей криється в принциповій невідтворюванності природного руслового процесу в лабораторних умовах, на що звертає увагу К.В.Гришанін [5]. Причина неадекватності гідравлічного моделювання руслових потоків полягає у високому рівні їх саморегулюючої спроможності. В залежності від витрат води і наносів кожна річка сама виробляє розміри живого перерізу і тип руслового процесу. Умови формування русла в гідравлічному лотку або на русловому майданчику зовсім інші ніж в річках. Згідно з мірилом моделі повинні моделюватися фізичні властивості наносів - проблема, яка не має однозначного рішення. Таким чином, результати гідравлічного моделювання руслових процесів навряд чи можна безоглядно переносити на природні об’єкти.

У відповідності з гідро морфологічною теорією руслового процесу транспортуюча спроможність потоку забезпечується рухом не окремих частинок наносів, а переміщенням їх скупчень. Тому у формулі (4) замість функції крупності наносів повинна стояти величина, що враховує характеристики донних пасм. Дотримуючись структури формули (4), Б.Ф.Сніщенко і З.Д.Копаліані [7] на основі численних лабораторних і натурних досліджень для всіх піщаних і піщано-гравелистих русел пропонують величину А в такому виді

$$A = \frac{0{,}011}{g^{1{,}5}} \tag{5}$$

де g - прискорення вільного падіння.

Варто зробити критичні зауваження і щодо доцільності множника (1 - V_0/V). Він відсутній у формулі транспортуючої спроможності донних наносів Б.Ф.Сніщенко і З.Д.Копаліані [7]

$$G = 0{,}011\, B_p h \frac{V^4}{(gh)^{1{,}5}} \tag{6}$$

структура якої теоретично обґрунтована засобами розмірного аналізу С.Г.Ткачуком [10].

Однією з цілей введення множника (1 - V_0/V) до формули (4) є визначення моменту, з якого починається рух наносів. Але загальний розмив на мостових переходах починається з моменту затоплення заплав і закінчується їх звільненням від води.

При рівнях вищих за відмітки заплав середня швидкість в руслі V завжди перевищує нерозмиваючу V_0. Тому впродовж тривалості загального розмиву заздалегідь відомо, що $(1 - V_0/V) < 1$, і врахування початкової швидкості зрушення втрачає сенс. Крім того, при $V < V_0$ формула (4) стає фізично безглуздою, бо дає від'ємне значення транспортуючої спроможності.

Сучасна концепція пасмового транспортування русло формуючих донних наносів взагалі робить зайвим поняття початкової швидкості руху наносів, через свою невизначеність. Якщо мова йде про окремі частинки, рух яких можна помітити в лабораторії і практично неможливо в природних умовах, то не вони обумовлюють транспортуючу спроможність. Якщо ж це стосується донних пасм, то їх рух настільки повільний, що про будь-які заміри початкової швидкості не може бути й мови. З наведених міркувань виразом $(1 - V_0/V)$ можна знехтувати. Можлива при цьому похибка іде в запас транспортуючої спроможності потоку.

Наноси, що рухаються в завислому стані не є русло формуючими і здебільшого проносяться транзитом, але все таки перебирають на себе якусь частину транспортуючої спроможності. При необхідності врахування двох режимів транспортування наносів - донного і завислого, в (4) функція крупністі наносів може бути обчислена за емпіричною формулою І.І.Леві [6]

$$A = \left[\frac{0{,}2\, h^{0{,}25}}{gw} + \frac{2}{g^{1{,}5} d^{0{,}25}} \right] \frac{1 + r}{\gamma} \tag{7}$$

де: w - гідравлічна крупнію ть наносів; γ - об'ємна вага наносів (здебільшого 2650 кг/м^3); r - коефіцієнт порізності наносів (в середньому 0,65); d - крупнію ть наносів; g прискорення вільного падіння; h - глибина, або за формулою В.М.Гончарова [4]

$$A = \frac{0{,}002(1 + r)(1 + \varphi)d}{\left(V_{од} \cdot d^{1/6}\right)^3} \tag{8}$$

де: $V_{од}$ - донна нерозмиваюча швидкість; φ - функція, яка характеризує обтікання наносів.

З огляду на перевагу показника степені m = 4 над n = 0,5 у формулі (4) її можна спростити звівши до виразу

$$G = A B_p V^4 \tag{9}$$

в якій функція А може обчислюватись за формулами (7) та (8), або визначатися наближено по табл. 2.

Таблиця 2

Грунт	Різновид грунту	d, мм	A
Пісок	Дрібний	0,05-0,25	$18{*}10^{-4}$- $7{,}2{*}10^{-4}$
	Середній	0,25-1,0	$7{,}2{*}10^{-4}$-$3{,}4{*}10^{-4}$
	Крупний	1,0-2,5	$3{,}4{*}10^{-4}$-$2{,}6{*}10^{-4}$
Гравій	Дрібний	2,5-5,0	$2{,}6{*}10^{-4}$-$2{,}0{*}10^{-4}$

Слід зауважити, що похибка у величині А слабо впливає на результати багаторічного прогнозування загального розмиву. В аналітичній реалізації математичної моделі виявляється, що ця величина має показник степені 0,1. Тому навіть стовідсоткова помилка в значенні А відобразиться в загальному розмиві похибкою всього 7%.

Формули (4), (6), (9) встановлюють залежність між середньою швидкістю потоку V і його транспортуючою спроможністю G - величинами, які за своєю фізичною сутністю є динамічними. Отже в математичні моделі загального розмиву ці формули входять як динамічні рівняння для твердої фази потоку.

Рух води в річках майже завжди неусталений. Нестаціонарність потоку особливо помітна в паводковий період та під час водопілля. Для неусталеного потоку води рівняння нерозривності має вид, подібний до рівняння балансу наносів,

$$\frac{\partial Q}{\partial \ell} - \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

де на відміну від рівняння (1) замість транспортуючої спроможності потоку G стоїть витрата води Q, що свідчить про їх однакову фізичну сутність - формальне відтворення закону збереження матерії. Але природним потокам в річках властиве значне перевищення сил тертя над силами інерції, що означає фактичне врівноваження рушійної складової сили тяжіння і сили тертя. Такий рух води мало відрізняється від усталеного, тому і називається квазістаціонарним. Отже в зоні впливу мостового переходу рух води вважається квазістаціонарним, але, внаслідок стиснення потоку, нерівномірним.

Характерною рисою квазістаціонарного потоку є однозначний зв'язок між витратами і рівнями, коли швидкість вздовж течії змінюється тільки тому, що змінюється по довжині потоку його витрата. Натомість зміна витрати в річках за їх течією навіть в паводок занадто мала. Кількісна оцінка, оприлюднена К.В.Гришаніним [5], свідчить, що в звичайних умовах зміна витрати води між створами віддаленими один від одного на один кілометр складає десяті частки відсотка від середньодобової витрати. За цих обставин для кожного моменту часу замість рівняння (10) допустимо застосовувати рівняння сталості витрати в живому перерізі, яке для русла буде таким

$$Q_p = B_p h V_p \tag{11}$$

де: Q_p - руслова витрата, яка в паводок змінюється в часі та вздовж зони впливу мостового переходу внаслідок стиснення ним річкового потоку; B_p, h, V_p - середні в живому перерізі русла - ширина, глибина і швидкість.

З метою визначення межі існування квазіусталеного руху застосовується параметр нестаціонарності

$$П_{нс} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial Q}{\partial t}$$

Верхній границі квазіусталеного руху відповідає значення параметра нестаціонарності $П_{нс}$ = 0,5 [3], що значно перевищує властиве переважній більшості річок значення $П_{нс}$ з порядком його величини 10^{-2} - 10^{-3}.

І головне на що варто звернути увагу стосовно рівняння (10). В зоні впливу мостового переходу градієнт руслової витрати $\partial Q_p/\partial \ell$ формується внаслідок потужного водообміну між заплавами і руслом, тому впливом нестаціонарності на його величину можна знехтувати.

Якщо рівень високої води не перевищує брівок русла, стиснення потоку мостовим переходом відсутнє, але відбуваються природні руслові деформації, наприклад, замулення дна після залишкового розмиву. В математичній моделі природних руслових деформацій теж, виявляється, можна замість диференціального рівняння нерозривності (10) застосовувати просту залежність (11). Щоб зрозуміти, чому за однакової структури рівнянь нерозривності для твердої і рідкої фаз потоку градієнтом руслової витрати $\partial Q_p/\partial \ell$ в (10) знехтувано, а градієнт транспортуючої спроможності $\partial G/\partial \ell$ в (1) залишено, варто пригадати таке. В квазірівномірних потоках, що протікають в природних умовах, витрата води однозначно і лінійно залежить від середньої швидкості в живому перерізі. Натомість транспортуюча спроможність потоку залежить від середньої швидкості в четвертій степені. Тому мізерні зміни витрат по довжині річок в паводковий період призводять до таких же мізерних змін в значеннях середніх швидкостей. Але піднесені до четвертої степені навіть ці незначні зміни швидкостей обумовлюють помітні зміни в транспортуючій спроможності. Через це в рівнянні балансу наносів (1) величина градієнту транспортуючої спроможності $\partial G/\partial \ell$ є співставною з другим членом - $\partial \omega/\partial t$.

Загальний розмив починається з виходом води на заплави, що супроводжується трансформацією руслової витрати, або ж появою її градієнту $\partial Q_p/\partial \ell$ вздовж зони впливу мостового переходу і порушенню поздовжнього балансу наносів. Таким чином, динамічне рівняння руслового потоку повинно відтворювати головну причину загального розмиву -трансформацію руслової витрати. З метою узагальнення, це рівняння в період затоплення заплав записується в такому формалізованому виді

$$\beta_p = f(\ell) \qquad (12)$$

де β_p - коефіцієнт трансформації руслової витрати, який для одного й того ж моменту часу вводиться відношенням:

$$\beta_p = \frac{Q_p}{Q_{pn}} \qquad (13)$$

де: Q_p - трансформована руслова витрата, що змінюється з відстанню і в часі; $Q_{рп}$ - природна руслова витрата залежна тільки від часу.

Застосування коефіцієнта трансформації (13) дозволяє розділити аргументи - час і відстань від яких залежить руслова витрата в зоні впливу мостового переходу, що значно спрощує аналітичну реалізацію математичної моделі. Дійсно, можна записати, що

$$Q_p = \beta_p Q_{pn} \tag{14}$$

де коефіцієнт трансформації β_p змінюється тільки з відстанню ℓ, а природна руслова витрата $Q_{рп}$ - тільки в часі згідно своєму гідрографу.

Функціональна залежність (12) називається характеристикою трансформації. Питання про вид цієї функції та її вплив на загальний розмив під мостом на разі не має задовільної відповіді. Теоретично отримані С.Г.Ткачуком [9] гіперболічні характеристики трансформації руслової витрати за умови колінеарності векторів швидкості руслового потоку і заплавних струмин

$$\beta_{p,||} = \left(1 - \frac{\ell}{R} \right)^{-1} \tag{15}$$

та прямого кута між ними

$$\beta_{p,\perp} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{\ell}{R} \right)^{-2} \right]} \tag{16}$$

де R параметр центральної струмини, слід вважати лише одними з можливих.

Результати лабораторних досліджень крупномірильної моделі мостового переходу С.Г.Ткачука [8], виконані на початку 80-х років минулого століття на русловому майданчику науково-дослідного інституту УкрНДГіМ показують (мал.1), що експериментальні точки розташовуються ближче до кривої (15), але не свідчать про її універсальність.

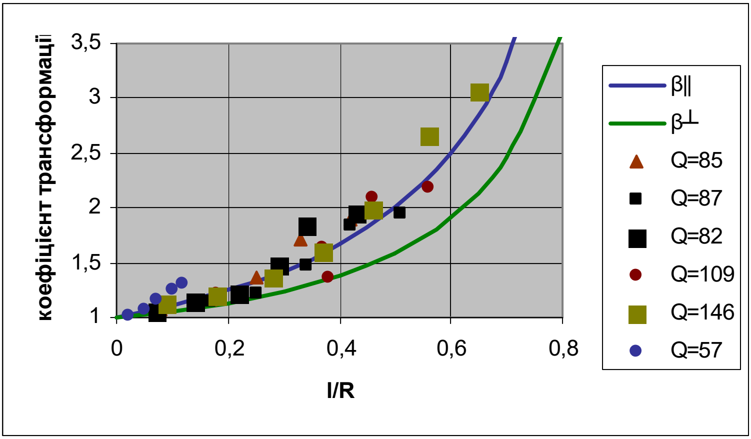

Рисунок 1 - Результати експериментальних досліджень трансформації руслової витрати

Майже одночасно з київськими лабораторними дослідженнями В.П.Баховчуком [2] виконувались гідрометричні роботи на мостовому переході через р. Березину біля м. Борисова (Білорусь). Натурні дані цих унікальних, бо єдиних за всю історію мостобудування досліджень трансформації руслової витрати представлені на мал. 2.

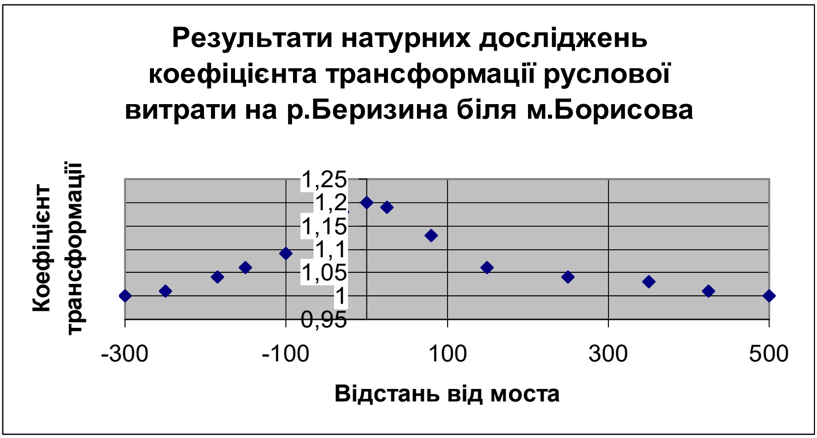

Рисунок 2

За відсутності систематичних лабораторних та натурних досліджень можна визначити лише область існування характеристики трансформації руслової витрати (див. мал.1) і досить невпевнено уявляти її вид. Натурні точки (див. мал. 2) не дозволяють зробити однозначну апроксимацію через їх обмежену кількість. Це може бути як гіперболічна, так і параболічна залежність. Причому кубічна парабола, яка має точку перегину, може виявитися найбільш адекватною до умов на мостових переходах. В загальному виді це поліном третьої степені

$$\beta_р = a\,\ell^3 + b\,\ell^2 + c\ell + d \qquad (17)$$

де коефіцієнти полінома визначаються, виходячи з конкретних умов на переході. Отже кубічна парабола виявляється більш гнучкою щодо врахування особливостей кожного мостового переходу.

Математична модель звичайно складається з системи рівнянь і граничних умов, які в багаторічному прогнозуванні загального розмиву набувають змісту початкових. Їх фізична сутність полягає в аналітичному вираженні поздовжнього профілю дна русла до початку розмиву. Якщо поздовжній профіль до проходження першого після спорудження мостового переходу паводка має довільну конфігурацію, то він апроксимується кубічним сплайном. Для наступних паводків початкові умови залежатимуть від залишкових деформацій, залишених всіма попередніми паводками. Тому при багаторічному прогнозуванні загального розмиву для другого і наступних паводків поздовжній профіль дна до розмиву завжди задається кубічним сплайном. Але для визначення верхньої границі загального розмиву, за відсутності різких перепадів відміток дна, початкові умови можуть мати найпростіший вид $h = h_{рп}$, де $h_{рп}$ - стала по довжині природна глибина в руслі до розмиву.

Таким чином, для кожного виду початкових умов, комбінуючи наведені вище рівняння, можна, в залежності від змісту задачі, скласти вісім модифікацій математичної моделі загального розмиву. При цьому кожна математична модель обов’язково повинна складатись з чотирьох рівнянь і містити в собі по одному з рівнянь балансу наносів, транспортуючої спроможності, сталості витрати в живому перерізі та характеристику трансформації руслової витрати. Враховуючи два види початкових умов, кількість варіантів математичної моделі загального розмиву подвоюється.

Висновки

1. Математична модель загального розмиву складається щонайменше з чотирьох рівнянь і початкових умов.

2. Рівняння математичної моделі загального розмиву повинні відтворювати закони збереження і руху твердої та рідкої фаз потоку, а початкові умови апроксимувати поздовжній профіль дна русла до розмиву.

3. Рівняння балансу наносів є домінантним в математичній моделі загального розмиву.

4. Адекватність математичної моделі загального розмиву ґрунтується на фундаментальності рівнянь нерозривності та лабораторних і натурних дослідженнях її динамічних рівнянь - транспортуючої спроможності і трансформації русової витрати.

5. Поодинокі лабораторні та натурні дослідження трансформації руслової витрати не дозволяють зробити їх однозначну інтерпретацію, що обумовлює доцільність теоретичного аналізу впливу різних характеристик трансформації на загальний розмив під мостом.

Література

1. **Андреев О.В., Журавлёв М.М., Рассказов О.А.** Вопросы мостовой гидравлики и гидрологии. - М.: Транспорт, - 1967. - 200 с.

2. **Баховчук В.П.** Закономерности изменения руслового расхода в верхних бьефах мостовых переходов. - В кн..: Проектирование искусственных сооружений на автомобильных дорогах. - Сб. Науч. Тр. МАДИ. - М.: Издание МАДИ, - 1983, - с. 12 - 24.

3. **Большаков В.А., Ткачук С.Г.** О параметре нестационарности потоков ливневых вод. В сб.: Гидравлика и гидротехника. - К.: Техніка, вып. 12, - 1971. - с. 9-15.

4. **Гончаров В.Н.** Динамика русловых потоков. - Л.: Гидрометеоиздат, - 1969. - 428 с.

5. **Гришанин К.В.** Динамика руслових потоков. - Л.: Гидрометеоиздат, - 1979. - 312 с.

6. Леви И.И. Инженерная гідрологія. - М.: Высшая школа, - 1968. - 237 с.

7. Снищенко Б.Ф., Копалини З.Д. О скорости движения гряд в реках и лабораторних условиях. - Труды ГГИ. - Л.: Гидрометеоиздат, вып. 252, - 1978, с. 20-37.

8. Ткачук С.Г. Экспериментальные исследованияи зменения руслового расхода в верхнім бьефем мостовых переходов. В сб. Гидравлика и гидротехника. - К.: Техніка, вып. 41, - 1985, с. 54-57.

9. Ткачук С.Г. Аналитический метод определения верхнего предела размыва. В сб. Гидравлика и гидротехника. - К.: Техніка, вып. 42, - 1986, с. 38-46.

10. Ткачук С.Г. Теоретическое обоснование формулы расхода речных наносов. В сб. Гидравлика и гидротехника. - К.: Техніка, вып. 58, - 1997, с. 45-51.