

**С.Ф Клованич,
И.Н. Мироненко**

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА

Железобетон - физически нелинейный, анизотропный материал, обладающий способностью к трещинообразованию. Учет этих свойств при расчете конструкций возможен при наличии соответствующих определяющих соотношений для железобетона как комплексного материала, состоящего из бетона и арматуры. Построение этих соотношений осуществлено на базе теории течения бетона, описываемой ниже.

Теории течения в основе своей имеют так называемые поверхности пластичности или нагружения. Вид этих поверхностей зависит от материала, и для таких неоднородных материалов как бетон носит достаточно сложный характер. Основные геометрические параметры этих поверхностей получаются, в основном, путем умозрительных построений и с трудом поддаются экспериментальному обоснованию.

В статье предлагается вариант феноменологической модели материала, имеющей в основе поверхность нагружения, основные параметры которой получаются на основании опытных данных. Использование этой модели предполагается в шаговых методах расчета, когда прослеживаются все этапы напряженного состояния конструкций или системы, от начального вплоть до разрушения.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Известно, что условие прочности должно описывать выпуклую и гладкую поверхность, симметричную относительно диагонали пространства главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Строится эта поверхность обычно в местной цилиндрической системе координат z, ρ, θ , связанной с исходной $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ следующими соотношениями

$$z = \sqrt{3}\sigma_o; \quad \rho = \sqrt{3}\tau_o; \quad \sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\sqrt{2} \frac{I_3}{\tau_o^3} \right);$$

$$\tau_o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)};$$

где σ_o, τ_o - октаэдрические нормальные и касательные напряжения, θ - угол вида напряженного состояния, I_3 - третий инвариант девиатора напряжений, равный

$$I_3 = \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_o) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_o) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_o) \end{vmatrix}.$$

Другими словами, эта поверхность описывается уравнением вида $f(\sigma_o, \tau_o, \theta) \equiv 0$, которое обычно строится на базе опытных данных при частных видах напряженных состояний способом, предложенным М.М.Филоненко-Бородичем [5]. Сначала формируются две кривые $\tau_1(\sigma_o)$ и $\tau_2(\sigma_o)$, соответствующие экстремальным значениям $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 60^\circ$, аппроксимирующие экспериментальные данные, полученные из опытов при $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ и $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. Затем осуществляется интерполяция для значений угла θ , находящихся между двумя предельными случаями. Характерные сечения поверхности представлены на рис.1. Графики функций $\tau_1(\sigma_o)$ и $\tau_2(\sigma_o)$ (рис.1) имеют ряд характерных точек. Так, кривая $\tau_1(\sigma_o)$ пересекает ось σ_3 в точке, соответствующей пределу прочности при одноосном сжатии - R_c и плоскость $\sigma_1 - \theta - \sigma_2$ в точке, соответствующей пределу прочности при равномерном двухосном растяжении R_{2p} . Кривая $\tau_2(\sigma_o)$ пересекает плоскость $\sigma_2 - \theta - \sigma_3$ в точке, соответствующей пределу прочности при равномерном двухосном сжатии - R_{2c} , и ось σ_1 в точке одноосного растяжения R_p . Координаты перечисленных точек показаны на рис.1. Кроме того, обе кривые пересекаются в точке с координатами (fR, θ) , соответствующей трехосному равномерному растяжению. Функции $\tau_1(\sigma_o)$ и $\tau_2(\sigma_o)$ представим в виде [3]

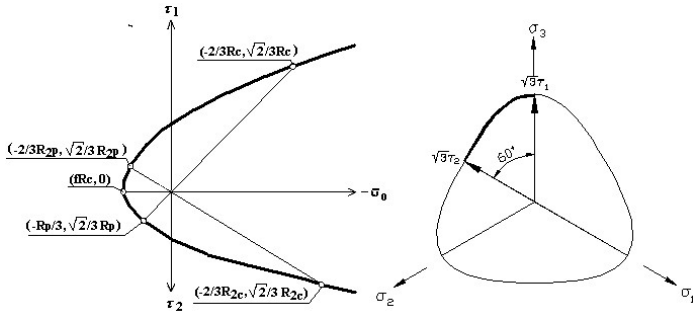


Рисунок 1 - Характерные сечения поверхности прочности

$$\tau_1 = AR_c \left(\frac{\sigma_0}{R_c} - f \right)^\alpha; \quad \tau_2 = BR_c \left(\frac{\sigma_0}{R_c} - f \right)^\beta, \quad (1)$$

позволяющем при различных значениях постоянных коэффициентов получить частные случаи, соответствующие различным вариантам существующих условий прочности. Коэффициенты, входящие в уравнение (1), получаются подстановкой координат характерных точек (рис.1)

$$\alpha = \frac{\ln(m_p \omega)}{\ln\left(\frac{f - 2/3 m_p \omega}{f + 1/3}\right)} \leq 1; \quad \beta = \frac{\ln(\omega / m_c)}{\ln\left(\frac{f - \omega/3}{2/3 m_c + f}\right)} \leq 1; \quad A = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{1}{3} - f \right)^{-\alpha}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{3} \omega \left(\frac{\chi}{3} - f \right)^{-\beta}; \quad m_p = \frac{R_{2p}}{R_p}; \quad m_c = \frac{R_{2c}}{R_c}; \quad \omega = \frac{R_p}{R_c}.$$

Для интерполяции между значениями $\theta = 0$ и $\theta = 60^\circ$ предлагается следующее выражение [3]

$$\tau_0 = \tau_1 - \delta(\tau_1 - \tau_2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta, \quad (2)$$

удовлетворяющее условию выпуклости и гладкости сечений поверхности прочности плоскостями $\sigma_0 = \text{const}$.

Таким образом, в описанном способе построения поверхности прочности требуется пять независимых параметров материала R_c , R_p , R_{2c} , R_{2p} , f , соответствующих частным случаям напряженного состояния. Выражение (2) преобразуем к следующему виду [6]

$$f(\sigma_o, \tau_o, \theta) = \tau_o - \tau_i \left[1 - \delta(1 - \tau_2 / \tau_1) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta \right] = \tau_o - \tau_i g = 0, \quad (3)$$

где $g = 1 - \delta(1 - \tau_2 / \tau_1) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta$.

ПОВЕРХНОСТЬ НАГРУЖЕНИЯ

Эта поверхность строится на базе предельной поверхности в предположении равномерного расширения поверхности нагружения, пока в предельном состоянии она не совпадет с поверхностью прочности (3). Процесс получения поверхности нагружения наглядно представлен на рис.2, или в аналитической форме:

$$\tau_o + h(\chi) = \tau_i g,$$

либо так:

$$F(\sigma_o, \tau_o, \theta, \chi) = \tau_o + h(\chi) - \tau_i g = 0, \quad (4)$$

где χ - параметр упрочнения, $h(\chi)$ - функция упрочнения.

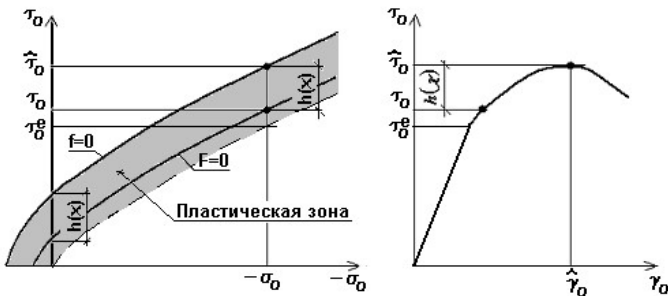


Рисунок 2 - Поверхность нагружения

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

В основу исследования положен ассоциированный закон Мизеса, согласно которому пластическое течение развивается по нормали к поверхности нагружения, или

$$\{d\varepsilon_p\} = \lambda \frac{\partial F}{\{\partial\sigma\}}, \quad (5)$$

где $\{d\varepsilon_p\} = \{d\varepsilon_x^p, d\varepsilon_y^p, d\varepsilon_z^p, d\gamma_{xy}^p, d\gamma_{yz}^p, d\gamma_{xz}^p\}$ -вектор приращений пластических деформаций; $\{\partial\sigma\} = \{\partial\sigma_x, \partial\sigma_y, \partial\sigma_z, \partial\tau_{xy}, \partial\tau_{yz}, \partial\tau_{xz}\}$ -вектор приращений напряжений; λ - коэффициент пропорциональности. Полные деформации определяются как сумма упругих и пластических деформаций, т.е.:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon_e\} + \{d\varepsilon_p\}, \quad (6)$$

откуда

$$\{d\varepsilon\} = [D]^{-1} \{d\sigma\} + \lambda \frac{\partial F}{\{\partial\sigma\}}. \quad (7)$$

При этом, как обычно, при $\left\{ \frac{\partial F}{\{\partial\sigma\}} \right\}^T \{\sigma\} < 0$ происходит разгрузка и

$\lambda = 0$. Следуя [1, 2] и пропуская промежуточные выкладки, окончательно запишем:

$$\{d\sigma\} = [D]_{ep} \{d\varepsilon\}, \quad (8)$$

где

$$[D]_{ep} = [D] - \frac{[D] \frac{\partial F}{\{\partial\sigma\}} \left(\frac{\partial F}{\{\partial\sigma\}} \right)^T [D]}{\left(\frac{\partial F}{\{\partial\sigma\}} \right)^T [D] \frac{\partial F}{\{\partial\sigma\}} - \frac{\partial F}{\partial\chi} \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\{\partial\sigma\}}}. \quad (9)$$

упруго-пластическая матрица, $[D]$ -матрица упругости материала.

Отметим, что производные по напряжениям, входящие в соотношение (9) и представленные вектором $\partial F / \{\partial\sigma\}$,

получаются стандартным образом, как производные сложных функций [1].

УПРОЧНЕНИЕ

В формулу (9) входит производная $\frac{\partial F}{\partial \chi}$, связанная с упрочнением. Для ее определения рассматриваются два варианта упрочнения. В первом из них в качестве меры упрочнения принят параметр Одквиста, представляющий собой суммарные пластические деформации на всем пути нагружения, т.е. в данном случае, функция нагружения (рис.2) имеет вид

$$h(\chi) = h(\gamma_o^p) = \bar{\tau} - \tau_o(\gamma_o^p). \quad (10)$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_o^p} = \frac{\partial h}{\partial \gamma_o^p} = \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o^p} = G_p. \quad (11)$$

Во втором варианте параметр упрочнения может быть определен как возможная работа напряжений на пластических деформациях, вариация которой равна

$$\partial \chi = \sigma_o \partial \varepsilon_o^p + \tau_o \partial \gamma_o^p. \quad (12)$$

Учитывая, что $\frac{\partial F}{\partial \chi} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_o} \frac{\partial \sigma_o}{\partial \chi} + \frac{\partial F}{\partial \tau_o} \frac{\partial \tau_o}{\partial \chi}$, а также

$$\frac{\partial \sigma_o}{\partial \chi} = \frac{\partial \sigma_o}{\sigma_o \partial \varepsilon_o^p + \tau_o \partial \gamma_o^p} = \frac{K_p H_p}{\sigma_o H_p + \tau_o K_p} \text{ и}$$

$$\frac{\partial \tau_o}{\partial \chi} = \frac{\partial \tau_o}{\sigma_o \partial \varepsilon_o^p + \tau_o \partial \gamma_o^p} \approx \frac{1}{\tau_o} G_p,$$

где $K_p = \frac{\partial \sigma_o}{\partial \varepsilon_o^p}$; $G_p = \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o^p}$; $H_p = \frac{\partial \sigma_o}{\partial \gamma_o^p}$ - пластические

объемный модуль, модуль сдвига и модуль дилатации. Окончательно имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = \frac{K_p H_p}{\sigma_o H_p + \tau_o K_p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_o} + \frac{1}{\tau_o} G_p \frac{\partial F}{\partial \tau_o}. \quad (13)$$

ПЛАСТИЧЕСКИЕ МОДУЛИ

Прежде необходимо сформулировать зависимости между компонентами октаэдрических напряжений σ_o, τ_o и деформаций $\varepsilon_o = 1/3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$,

$$\gamma_o = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{2}{3}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

в виде функций $\sigma_o = \sigma_o(\varepsilon_o, \gamma_o)$, $\tau_o = \tau_o(\gamma_o)$. Для определения этих функций будем использовать диаграммы деформирования бетона, аналогичные диаграмме при одноосном сжатию-растяжении, заимствованные из [6]. На рис.3 показана функция $\tau_o = \tau_o(\gamma_o)$ в относительных координатах $\eta = \gamma / \bar{\tau}$, $\xi = \tau / \bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ и $\bar{\gamma}$ - координаты вершины диаграммы. Выражение для этой функции имеет вид

$$\xi = \frac{\lambda \eta}{1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3}, \quad (14)$$

$$\bar{\gamma}_o = \lambda \frac{\bar{\tau}_o}{2G_o}; C = \lambda \frac{1 - \xi_r}{\xi_r (\eta_r - 1)^2} - \frac{1}{\eta_r}; B = 1 - 2C; A = C + \lambda - 2.$$

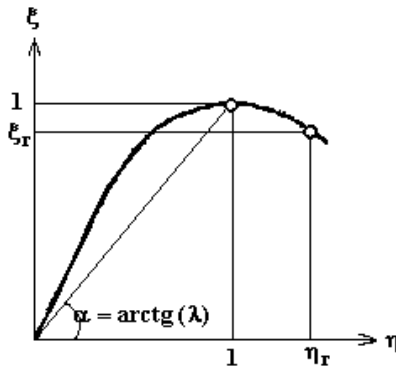


Рисунок 3 - Исходная диаграмма

При этом предельное значение $\bar{\tau}$ определяется из выражения (2) или (3), G_o - начальный модуль упругости бетона при сдвиге, $\xi_r \approx 0.85, \eta_r \approx 1.41$ - координаты точки на ниспадающей ветви, λ - коэффициент упругопластических деформаций, определяемый экспериментально и зависящий от вида бетона, его значение принимается в диапазоне 1.8-2.5.

Пластический модуль сдвига равен

$$G_p = \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o^p} = \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o - \partial \gamma_o^e} = \frac{G_o G}{G_o - G}, \quad (15)$$

где модуль сдвига для полных деформаций

$$G = \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o} = \frac{\bar{\tau}_o}{\bar{\tau}_o} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{2G_o}{\lambda} \xi',$$

$$\xi' = \frac{1 - B\eta^2 - 2C\eta^3}{(1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3)^2}.$$

Для определения пластических модулей объемных деформаций и дилатации представим диаграмму для всестороннего сжатия в виде произведения двух функций $\sigma_o = \sigma_o(\varepsilon_o, \gamma_o) = f_1(\varepsilon_o) f_2(\gamma_o)$, первая из которых определяет нелинейность объемного деформирования бетона, вторая - эффект дилатации. Функцию $f_1(\varepsilon_o)$ сформулируем по аналогии с выражением (3) в виде $f_1(\sigma_o) = \bar{\sigma}_o \xi$, в котором, однако $\eta = \frac{\varepsilon_o}{\bar{\varepsilon}_o}; \bar{\tau}_o = \lambda \frac{\bar{\sigma}_o}{3K_o}$. Для функции $f_2(\gamma_o)$ может быть рекомендовано выражение [4]: $f_2(\gamma_o) = \exp(\omega \zeta / (1 - \zeta))$, где $\zeta = \gamma_o / \bar{\gamma}_o$. Тогда модули объемных деформаций и дилатации равны:

$$K = \frac{\partial \sigma_o}{\partial \varepsilon_o} = \bar{\sigma}_o f_2(\gamma_o) \xi'; \quad H = f_1(\varepsilon_o) f_2(\gamma_o) \frac{\omega}{\bar{\gamma}_o (1 - \zeta)^2},$$

а соответствующие пластические модули имеют вид:

$$K_p = \frac{\partial \sigma_o}{\partial \sigma_o^p} = \frac{\partial \sigma_o}{\partial \varepsilon_o - \partial \varepsilon_o^e} = \frac{K_o K}{K_o - K}; \quad H_p = H, \quad (16)$$

где K_0 - начальный модуль объемных деформаций бетона.

РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ

Описанная теория течения была реализована в пакете прикладных программ «Plast-Khan» [3], предназначенном для реализации инкрементальных моделей материала в нелинейных задачах с помощью МКЭ шаговым и шагово-итерационным методами.

Рассмотрим пример расчета предварительно напряженной железобетонной балки из опытов А.Н.Петрова (НИИЖБ). Геометрические размеры, схемы армирования, нагружения и расчетная представлены на рис.4. При этом использовались изопараметрические плоские четырехузловые конечные элементы для моделирования бетона и стержневые элементы для арматуры. Совместная работа бетона и арматуры обеспечивалась равенством перемещений в узлах. Исходные характеристики материалов: $R_b = 43.5$ МПа, $R_{bt} = 2.5$ МПа, $E_b = 36000$ МПа, $\varepsilon_b = 0.002$, $\varepsilon_{bt} = 0.0001$. Нагружение осуществлялось ступенями в следующей последовательности. На первой ступени прикладывались горизонтальные силы, моделирующие предварительное нагружение, затем ступенями по $P=5$ кН прикладывались вертикальные силы вплоть до разрушения. Результаты расчетов представлены на рис.5-6. Здесь же, на рис.6 дано сопоставление с опытными данными по прогибам.

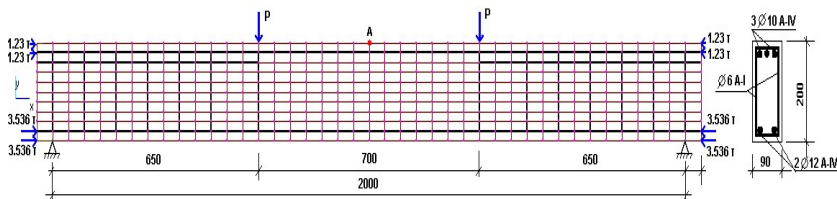


Рисунок 4 - Расчетная схема балки

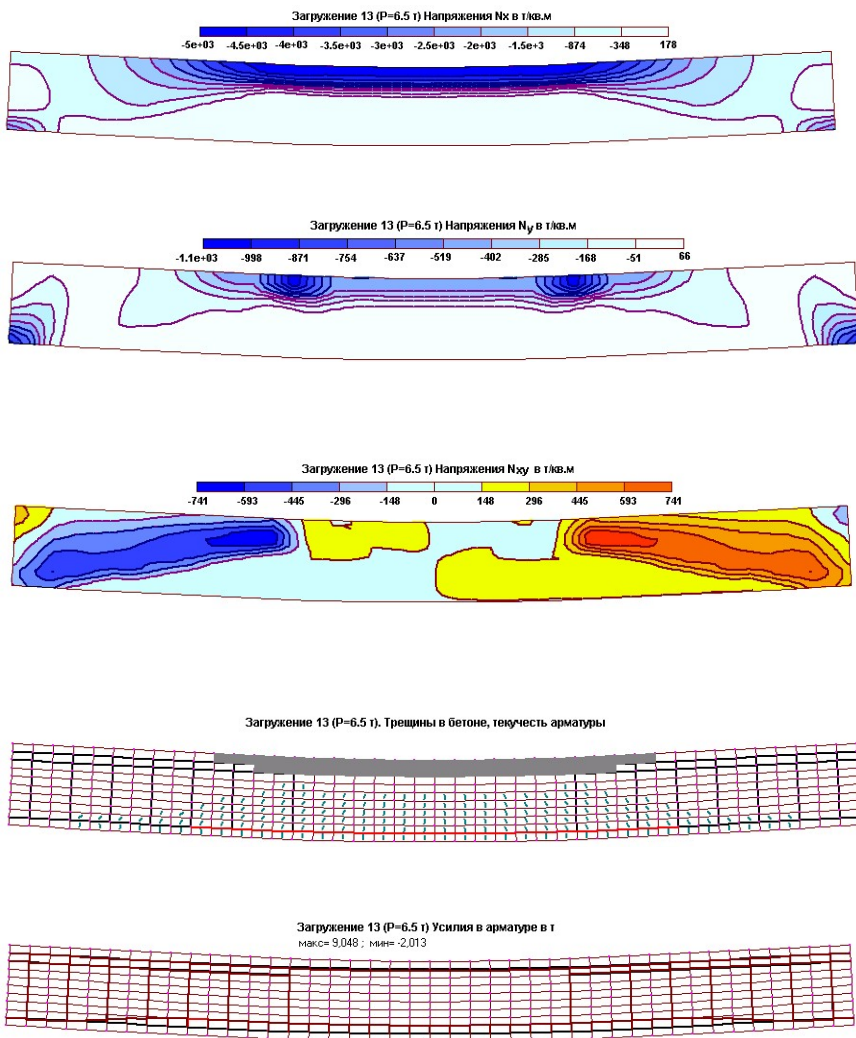


Рисунок 5 - Результаты расчета напряженного состояния балки.

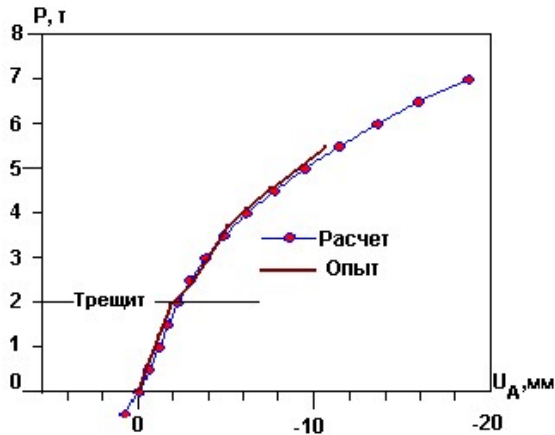


Рисунок 6 - Прогобы балки

Выводы

1. Предложен вариант ассоциированной теории пластичности бетона с деформационным упрочнением, построенном на базе предельной поверхности и диаграмм деформирования.

2. Созданная на основании теории течения бетона деформационная модель была успешно реализована и апробирована с помощью метода конечных элементов. Результаты расчетов показали достаточную надежность предлагаемой модели и пригодность ее для практического применения.

Литература

1. **Гришин А.В., Федорова Е.Ю.** Нелинейные динамические задачи расчета портовых гидротехнических сооружений. - Одесса: Изд-во ОНМУ, 2002. - 125 с.

2. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. - М.:Мир, 1975.- 541 с.

3. Клованич С.Ф. Модель прочности и деформаций бетона и грунта при сложном напряженном состоянии // Строительные конструкции / Меж вед. н.-т. сб., Вып. 59. -Киев, НИИСК, 2003. - С.163-170.

4. Кудашов В.И. Математическое моделирование процессов нелинейного деформирования и разрушения железобетонных сосудов высокого давления при термосиловом нагружении//Прикладные проблемы прочн. и пластич.:Методы решения.- Горький, 1987. - С.60-69.

5. Филоненко-Бородич М.М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. Сборник.- 1954. - Вып.19. С.36-48.

6. Mikkola M.J., Sinisalo H.S. Finite Element Analysis of Transient Non-linear Response of Reinforced Concrete Structures//Int. J. Pres. Ves. & Piping. - 1983. - №12.- P.107-122.

7. Saennz I.P. Discussion of equation to the stress-strain corver of concrete by P.Desai and S.Krishnan// ACI Journal, Proc. -1964. - v.61.- №9. - P.1229-1235.