

## ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОМБИНИРОВАННЫМ ТРЕНИЕМ

**Волкова В.Е.**

*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна*

---

### 1. Нелинейные модели динамических систем

Большинство механических систем проявляет нелинейные свойства при определенных параметрах внешнего возмущения. Нелинейность является общим свойством механических систем, а их линейное поведение является исключением. Обычно линейность соответствующих уравнений движения следует из предположения о малости амплитуд колебаний механических систем. Несформулированное, неявное отождествление понятий «малые» колебаний и «линейные» колебания можно найти уже в «Аналитической механике» Лагранжа. С таким отождествлением можно встретиться и в наше время. В действительности в данной работе речь идет о линейных колебаниях, т.е., о колебаниях, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, а малость колебаний не является определяющим признаком. В некоторых случаях малые колебания, сколь угодно малые, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Существуют и такие механические системы, в которых нелинейности динамических характеристик проявляется тем больше, чем меньше отклонение системы от положения равновесия [1], например, системы с натягом упругой характеристики и системы с сухим трением, где влияние нелинейности особо велико для небольших амплитуд колебаний.

В динамике механических систем, основными источниками нелинейности являются:

- геометрическая нелинейность, проявляющаяся (наблюдаемая) при значительных перемещениях исследуемой системы. Она является следствием нелинейности выражений потенциальной энергии. Примером таких систем являются гибкие стрелы, пологие арки, оболочки и тонкие пластинки;
- нелинейность по материалу, которая наблюдается при нелинейном законе зависимости между напряжениями и деформациями. Данный тип нелинейности часто встречается в задачах колебаний виброизоляторов, выполненных из полимерных материалов;
- нелинейность диссипативных характеристик. По существу диссипация энергии в механических системах является наименее изученным свойством. Модели вязкого трения являются весьма приближенным представлением физической действительности, и их применение часто вызвано удобством последующих вычислений. Удовлетворительное описание энергетических соотношений в диссипативных системах возможно только с помощью нелинейных моделей. Сухое трение, трение скольжения, гистерезисное трение, аэродинамическое сопротивление являются наиболее яркими примерами нелинейности диссипативных характеристик;
- конструктивная нелинейность, вызванная граничными условиями, например, нелинейности упругих характеристик, источником которых являются зазоры и податливость соединений, удары, возникающие при контакте с жесткими ограничителями.

Различие между линейными и нелинейными системами весьма существенно. Нелинейные системы могут демонстрировать сложное хаотическое поведение при действии внешнего гармонического возмущения, в то время как, реакция линейных систем всегда представляет

собою периодический процесс на частоте внешнего возмущения. Нелинейные системы склонны к двум противоположным тенденциям, к хаотическому поведению и самоорганизации.

Кроме того, даже слабо нелинейные системы могут вызывать чрезвычайно интересные и сложные явления, такие как перескоки, бифуркации, суб – и ультрагармонические колебания, предельные циклы и хаос.

В последние десятилетия наблюдается переход от слабо нелинейных систем к существенно нелинейным, для которых линеаризация недопустима. В таких системах принцип суперпозиции, являющийся основой большинства методов исследования линейных систем, неприменим. Поэтому вопросы расширения классических методов динамики, а также разработки новых методов исследований динамического поведения нелинейных систем являются весьма актуальными [2,3].

### **3. Фазовые траектории колебаний нелинейных систем в расширенном фазовом пространстве**

В анализе динамического поведения механических систем используется множество графических представлений колебательных процессов, такие как временные процессы, фигуры Лиссажу и годографы. Они позволяют сделать заключение о типе процесса и выполнить численную оценку его характеристик, о свойствах породившей их системы. В отличие от них классические фазовые траектории имеют ряд преимуществ.

Фазовое пространство в классической механике представляет собой многомерное пространство, на осях которого откладываются значения обобщенных координат, число измерений фазового пространства равно удвоенному числу степеней свободы системы [4]. Состояние системы изображается точкой в фазовом пространстве, а изменение состояния во времени – движением точки вдоль линии, называемой фазовой траекторией. Изображение на

фазовой плоскости  $(y, \dot{y})$  более наглядно и особенно хорошо представляет негармонические колебания. Отдельная фазовая траектория представляет собой одно некоторое вполне определенное движение. Недостатком фазовых траекторий является невозможность непосредственного представления колебательного процесса во времени, но этот недостаток компенсируется большим преимуществом. Геометрическое представление фазовой траектории или семейства траекторий позволяет сделать важные заключения о свойствах колебаний. Это, прежде всего, относится к колебаниям, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Для таких систем может оказаться, что единственно возможным методом исследования является метод фазовой плоскости. Возможен и иной выбор параметров фазовых плоскостей.

Основной идеей предлагаемой работы является расширение фазового пространства, путем введения дополнительной оси – ускорения. Таким образом, выполним переход к трехмерному фазовому пространству, ограниченному тремя координатными осями – перемещение, скорость и ускорение. Интерес к ускорениям точек механических систем вызван тем, что они являются более чувствительными к высокочастотным составляющим колебательных процессов [5].

### **4. Анализ поведения фазовых траекторий колебаний основного тона**

Предположим, что характеристика упругой силы представлена в виде суммы  $\alpha y \pm \beta y^3$ , т. е. является кубической зависимостью. Такой вид упругой характеристики может быть принят для большинства практических приложений, поэтому введенное предположение не отражается на общности результатов. Таким образом, получим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением вида

$$y + \varepsilon \dot{y} + H_1 \operatorname{sgn} \dot{y} + \alpha y \pm \beta y^3 = P(t). \quad (1)$$

Полученные фазовые траектории можно рассматривать как состоящие из отдельных элементов. Форма фазовых траекторий и размеры отдельных элементов зависят от соотношения параметров уравнения (1). Так, при  $\varepsilon = 0$ ,  $H_1 = 0$ ,  $\beta = 0$  система превращается в линейную, а ее фазовые траектории на плоскости вырождаются в прямую  $\ddot{y} = -\alpha y$ . Появление нелинейного члена  $\pm \beta y^3$  ( $\beta \neq 0$ ) преобразует фазовые траектории на плоскости  $(y, \ddot{y})$  в семейство кубических парабол  $\ddot{y} = -\alpha y \mp \beta y^3$  (рис. 1, а). Аналогично для значений параметров  $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  исследуемая система превращается в демпфер сухого трения, фазовые траектории которого на плоскости  $(y, \ddot{y})$  принимают форму прямоугольника. И, наконец, для значений параметров уравнения (1)  $H_1 = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  исследуемая система является демпфером вязкого трения, чьи фазовые траектории на плоскости  $(y, \ddot{y})$  представлены эллипсами (рис. 1). Таким образом, форма фазовых траекторий на плоскости  $(y, \ddot{y})$  для колебаний основного тона механических нелинейных систем с комбинированным трением, представленных уравнением (1), определяется значениями параметров  $\varepsilon$ ,  $H_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . В частности, для  $H_1 = 0$  и  $\beta = 0$  или когда  $\varepsilon = 0$  и  $\beta = 0$ , мы получаем семейство эллипсов – для модели трения Фойгта (рис. 1, в) и параллелограммов – для модели Кулона (рис. 1, б) соответственно.

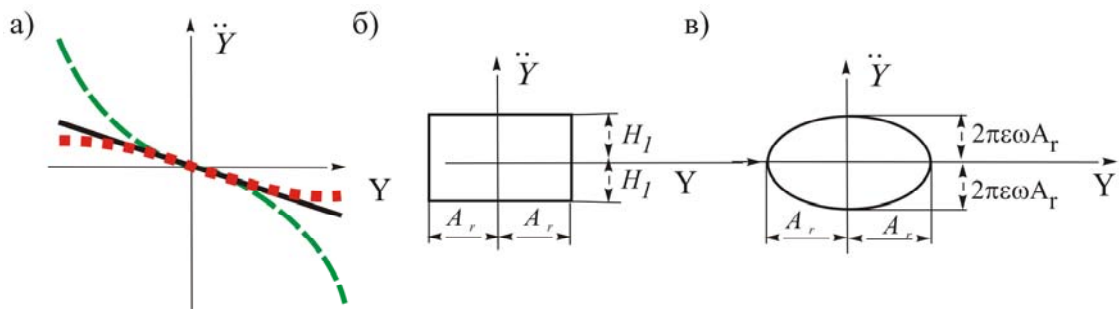


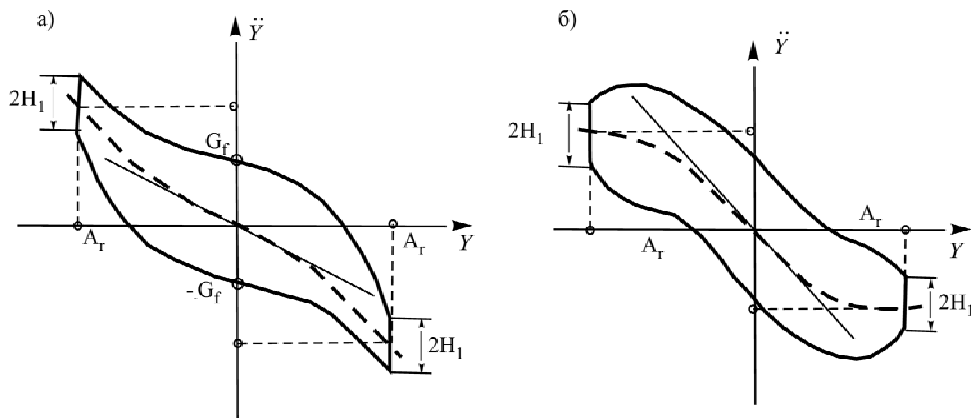
Рис. 1. Элементы фазовых траекторий

Для некоторого набора параметров  $\varepsilon$ ,  $H_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  фазовые траектории будут изменять свою форму и положение на плоскости  $(y, \ddot{y})$  в зависимости от частоты внешнего возмущения. При ее увеличении длина фазовых траекторий будет увеличиваться, достигая максимального значения при резонансе и быстро уменьшаясь после прохождения резонанса.

Одновременно с этим фазовые траектории на плоскости  $(y, \ddot{y})$  вращаются относительно начала координат в зависимости от частоты колебаний. Направление движения изображающей точки вдоль фазовой траектории осуществляется против часовой стрелки. Как показано на рис. 2, потери энергии в исследуемой системе равны площади, ограниченной фазовой траекторией, которая, в свою очередь, равна сумме площадей соответствующих прямоугольника и эллипса. Наибольших значений диссипация энергии достигает при основном резонансе.

В отличие от линейных систем частоты колебаний нелинейных систем зависят от амплитуд и параметров внешнего возмущения. Для определения параметров упругой характеристики предпочтение отдается фазовым траекториям резонансных колебаний на частоте внешнего

возмущения. Принимая во внимание особенности динамического поведения систем с нелинейной упругой характеристикой, целесообразно использовать для контроля точности оценки параметров упругих характеристик несколько фазовых траекторий на плоскости  $(y, \ddot{y})$ , полученных для нескольких значений частот внешнего возмущения. Оценка значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  может быть выполнена обращением известных аналитических решений или путем интерполяции.



*а – системы с «жесткой» упругой характеристикой;  
б – с «мягкой» упругой характеристикой.*

*Рис. 2. Фазовые траектории колебаний основного тона систем с комбинированным трением и нелинейной упругой характеристикой*

Например, предположим, что известны амплитуды  $A_1, A_2$  и частоты  $\omega_1, \omega_2$  колебаний основного тона, соответствующих околорезонансным режимам.

Для определения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  воспользуемся известным усредненным решением для нахождения частот резонансных колебаний

$$\omega^2 = \alpha + \frac{3}{4} \beta A^2, \quad (2)$$

тогда для двух последовательных значений частот получим систему двух уравнений, решая которую имеем:

$$\alpha = \frac{\omega_2 A_1^2 - \omega_1 A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}, \quad \beta = \frac{4}{3} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{A_1^2 - A_2^2}. \quad (3)$$

Анализируя рис. 2, можно отметить, что величина модуля сухого трения  $H_1$  может быть измерена непосредственно при обработке фазовой траектории в точке  $y = A_r$ , а значение коэффициента вязкого трения можно определить из соотношения

$$G_f = 2\pi\omega\varepsilon A + H_1, \quad (4)$$

где  $G_f$  – расстояние между точками пересечения фазовой траекторией оси  $\ddot{y}$ .

Точность полученных значений параметров вязкого и сухого трения может быть оценена проведением альтернативных вычислений, представленных известными формулами.

## **Выводы**

Сопоставляя полученные результаты, можно сделать следующие выводы. Предлагаемый автором метод непараметрической идентификации открывает новые возможности для обработки данных. В отличие от известных методов он не требует применения вычислительной техники и может быть реализован в полевых условиях. Данный метод может быть применен как системам с гладкими, кусочно-линейными, так и разрывными характеристиками.

Возможности предлагаемого метода ограничены только уровнем шумов, погрешностью измерения и объемом выборки обрабатываемого процесса.

## **Литература**

1. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Машгиз, 1963. – 319 с
2. Pilipchuk V.N., The calculation of strongly nonlinear systems close to vibration-impact systems// PMM – vol.49.-1985-p.572–578.
3. Babitsky V.I., Krupenin V.L., Vibrations of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. – Springer-Berlin. – 2001.
4. Neimark Yu.I. Some problems of qualitative theory of vibrations// Advances in mechanics. – 1991. – vol. 14. – N3 – p. 87-102.
5. Казакевич М. И., Волкова В. Е. Фазовые траектории нелинейных динамических систем. Атлас. – Д.: Наука и образование, 2002. – 94 с.