УДК 624.27

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА УПРУГИХ СОСТАВНЫХ БАЛОК

Славомир Карась
Люблинская Политехника, Польша

1. Введение

Предметом рассмотрения есть расчет составных балок на податливых связях, для которых введены новые геометрические меры деформации. В случае изгиба такой мерой является поступательное линейное смещение нейтральной оси составляющего элемента.

История составных балок тесно связана с деревянными мостами. Основы этого анализа можно найти, например, в [1].

На западе развитие теории и практических приложений начинаются с момента издания книги Саттлера (Sattler) [2], где автор рассматривает составную балку с бетоном в сжатой зоне и стальной двутавровой балкой – в растянутой. Сегодня составные балки широко используются в строительстве мостов. В Польше сейчас приблизительно 50 % пролетных строений – сталежелезобетонные.

В России теорию составных стержней сформировал Ржаницын, который первым рассматривал не только жёсткие, но и податливые связи [3, 4].

Сегодня во многих книгах можно найти так называемую классическую теорию составных конструкций, например, [5-8].

В нашей работе предлагается новый подход к расчету напряженно-деформированного состояния составных стержней. Ставится цель формулирования теоретического аппарата. Задача рассматривается в рамках *технической теории.* Полагаем, что двумерный элемент деформируется линейно, подчиняясь закону Гука (Hooke). Составная балка состоит из двух элементов типа Бернулли (Bernoulli).

Далее примем, что

- бесконечно малый элемент балки, ограниченный сечениями $(x_3 + dx_3) - x_3$, испытывает малые деформации;
- рассматривается балка в состоянии чистого изгиба в плоскости $x_2 - x_3$ (рис.1.);
- поперечные размеры балок не изменяются, коэффициент Пуассона (Poisson) равен нулю;
- силами трения и склеивания в шве пренебрегаем.

В первой части анализа рассматривается *идеализированная* составная балка из двух однородных элементов как по геометрии, так и по материалу. Такое предположение позволяет сконцентрировать внимание на механике проблемы и ввести простую геометрическую меру податливости связей. В известной автору технической литературе такой подход не описан.

Во второй части впервые выведены соотношения, обычно использующиеся в анализе мостовой составной балки типа «бетон-сталь».

В заключении кроме выводов приведен краткий пример.

2. Первая часть

2.1. Предпосылки и обозначения

Рассматривается составная балка из двух элементов прямоугольного сечения. С верхним элементом связан индекс – "u", с нижним – индекс "b". Высоты элементов обозначаем через – h_u, h_b, соответственно ширины – b_u, b_b и центры тяжести – O_u, O_b.

В анализе примем, что в каждом из составляющих элементов нулевые линии (поверхности) нормальных напряжений $\sigma_{0\mathrm{u}}^{33}$, $\sigma_{0\mathrm{b}}^{33}$ совпадают с нулевыми линиями относительных деформаций ε_{0u}^{33}, ε_{0b}^{33}; их определения принимаем в виде:

$$\sigma_{u0} = \sigma_{u0}^{33} = 0 \to \varepsilon_{u0} = \varepsilon_{u0}^{33} = 0\,, \tag{1}$$

$$\sigma_{b0} = \sigma_{b0}^{33} = 0 \to \varepsilon_{b0} = \varepsilon_{b0}^{33} = 0\,. \tag{2}$$

В локальных прямоугольных координатах вертикальные ординаты положения деформаций ε_{0u}, ε_{0b} обозначим:

$$x_{2g} = x_g = \zeta_g \quad \text{и} \quad x_{2d} = x_d = \zeta_d\,. \tag{3.1-2}$$

В силу того, что на этом этапе рассматривается балка с одинаковыми по геометрии и материалу элементами, введем упрощения в записи параметров:

- $E_u = E_b = E$ – модули упругости;
- $A_u = A_b = A_0$ – площади поперечных сечений;
- $J_u = J_b = J_0$ – главные моменты инерции;
- $a_u = a_b = a_0$, $a_u + a_b = 2a_0 = a$ – расстояния между центрами тяжести составляющих элементов и центром тяжести балки (рис.2);
- $\zeta_u = \zeta_b = \zeta_0$ – вертикальные ординаты в локальных координатах нулевых относительных перемещений;
- $S_{u(\zeta_u)} = S_{b(\zeta_b)} = S_{0(\zeta)}$ – статические моменты относительно локальных главных осей элементов балки;
- $S_{u(i)} = S_{b(i)} = S_{0(i)}$ – статические моменты относительно главной оси составной балки;
- A_i, J_i, O_i – соответственно – поверхность, момент инерции, центр тяжести составной балки;

- изгибающие моменты, действующий на верхний элемент балки $M_u = M_0$, и нижний $M_b = M_0$; изгибающий момент, действующий на составную балку $M_{(i)} = M = M_u + M_b = 2M_0$;

- $N_u = N$, $N_b = N$ - продольные силы в элементах.

Задача описывается такими соотношениями:

- уравнения равновесия $\Sigma x_1 : N_u = N_b = N$, (4.1)

$$\Sigma x_2 \equiv 0 , \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_{O_{(b)}} : M_u + M_b + N\ a = M \quad (4.3)$$

и условия совместности деформаций в исходном и нагруженном состояниях.

2.2. Введение геометрической меры податливости связей

Рассмотрим два тривиальных примера составных балок: случай отсутствия связей в шве и случай неподатливых связей между элементами.

Пример I. Элементы не имеют связей в шве

Это граничный случай составной балки, эквивалентной по геометрическим характеристикам балке высотой h и шириной $2b$ (рис.1).

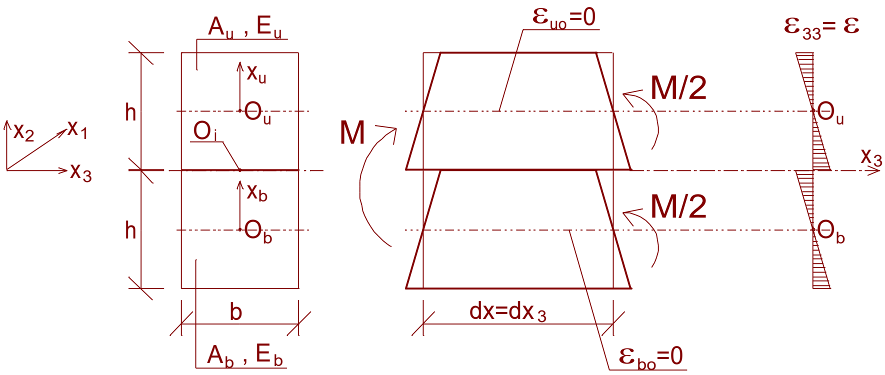


Рисунок 1 *– Случай отсутствия связей в шве*

Имеем очевидные соотношения:

$$A = A_u + A_b = 2A_0 , \qquad J_i^{(I)} = J_u + J_b = 2J_0 . \quad (5\text{-}6)$$

$$M_u = M_b = M_0 = \frac{M}{2} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{N} = 0 . \quad (7\text{-}8)$$

Относительные деформации определяются классическими зависимостями:

$$\varepsilon_u = -\frac{M_u}{EJ_u} x_{(u)} = -\frac{M_0}{EJ_0} x_{(u)}, \qquad \varepsilon_b = -\frac{M_b}{EJ_b} x_{(b)} = -\frac{M_0}{EJ_0} x_{(b)} . \quad (9.1\text{-}2)$$

Нулевые линии относительных деформации совпадают с осями составляющих элементов, в локальных координатах следует только положить $x_{(u)} = 0$ и $x_{(b)} = 0$. Принимая, что взаимное перемещение балок элементов во шве должно быть положительным, можно записать

$$\delta_I = \underline{\varepsilon_u} - \overline{\varepsilon_b} = 2\frac{M_0}{EJ_0}a_0 = \frac{M}{EJ_i^{(I)}}2a_0\,, \tag{10}$$

если

$$\underline{\varepsilon_u} = -\frac{M_u}{EJ_u}(-a_u) = -\frac{M_0}{EJ_0}(-a_0)\,,\quad \overline{\varepsilon_b} = -\frac{M_b}{EJ_b}a_b = -\frac{M_0}{EJ_0}a_0\,, \tag{11.1-2}$$

где $\underline{\varepsilon_u}$ обозначает линейную относительную деформацию нижних волокон верхней балки и соответственно $\overline{\varepsilon_b}$ – верхних волокон нижней балки.

__Пример II__. Случай неподатливой связи в шве

В этом граничном случае составная балка эквивалентна по геометрическим характеристикам балке сплошного сечения высотой $2h$ и шириной b (рис. 2).

Как и в первом случае, площадь поперечного сечения

$$A = 2A_0\,, \tag{5}$$

однако изменится момент инерции относительно главной оси составной балки, который, пользуясь теоремой Штайнера (Steiner), запишем в виде

$$J_i^{(II)} = 2\left[J_0 + A_0(a_0)^2\right] = 2J_0 + S_{0(i)}a\,. \tag{12}$$

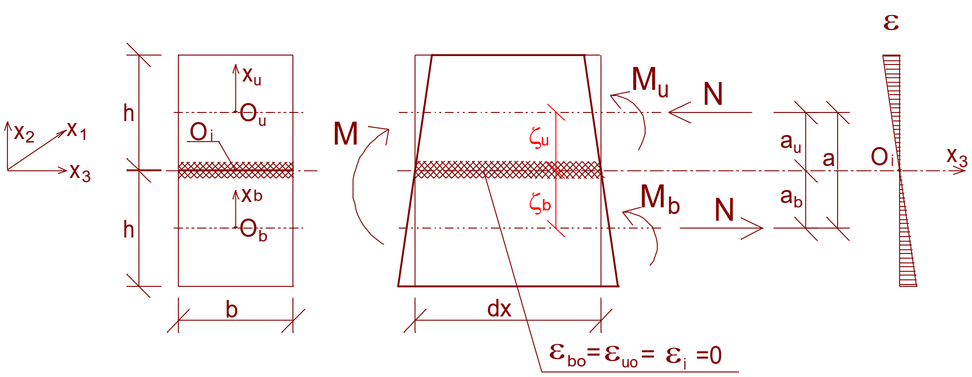


***Рисунок 2** – Случай полной (неподатливой) связи между элементами балки*

Относительные деформации определяются формулами

$$\varepsilon_u = -\frac{N}{EA_0} - \frac{M_u}{EJ_0}x_{(u)}\,,\quad \varepsilon_b = \frac{N}{EA_0} - \frac{M_b}{EJ_0}x_{(b)}\,. \tag{13.1-2}$$

Условие непрерывности деформаций запишем в виде

$$\varepsilon_{u0} = \underline{\varepsilon_u} = -\left[\frac{N}{EA_0} + \frac{M_0}{EJ_0}(-a_0)\right] = \varepsilon_{b0} = \overline{\varepsilon_b} = 0 \tag{14}$$

и в силу (3.3) имеем

$$N = M\frac{S_{0(i)}}{J_i^{(II)}}, \qquad M_u = M_b = M_0 = M\frac{J_0}{J_i^{(II)}}. \tag{15-16}$$

Отсутствие взаимных перемещений в шве:

$$\delta_{II} = 0. \tag{17}$$

Сравнивая рис. 1 и 2, заключаем, что собственные нейтральные оси составляющих элементов из положений Q_u Q_b смещаются к положению Q_i, – нейтральной оси составного сечения. Геометрические параметры смещения локальных нейтральных осей ζ_u и ζ_b здесь вводятся как мера податливости связей. В случае примера II (рис.2) эти параметры имеют значения

$$\zeta_u = a_u = a_0 \text{ и } \zeta_b = a_b = a_0. \tag{18.1-2}$$

Далее, используя введенные параметры податливости, рассмотрим пример балки на податливых связях.

<u>Пример III</u>. ζ_u ζ_b

Рассматривается составная балка с податливыми связями в шве (рис.3). Предельными случаями здесь являются примеры I или II. Как и раньше

$$A = 2A_0, \tag{5}$$

В этом случае можем записать два выражения момента инерции:

$$J_i^{(III.1)}(\zeta_0) = 2J_0 + 2A_0(\zeta_0)^2 = 2J_0 + S_{0(\zeta)}\zeta_0 \tag{19}$$

и

$$J_i^{(III.2)}(\zeta_0) = 2J_0 + A_0\zeta_0 a = 2J_0 + S_{0(\zeta)} a. \tag{20}$$

В предельных случаях моменты инерции совпадают:

$$\lim_{\zeta_0 \to 0} J_i^{(III.1)} = \lim_{\zeta_0 \to 0} J_i^{(III.2)} \to J_i^{(I)}, \tag{21}$$

$$\lim_{\zeta_0 \to a_0} J_i^{(III.1)} = \lim_{\zeta_0 \to a_0} J_i^{(III.2)} \to J_i^{(II)}, \tag{22}$$

где $\zeta_u = \zeta_b = \zeta_0$.

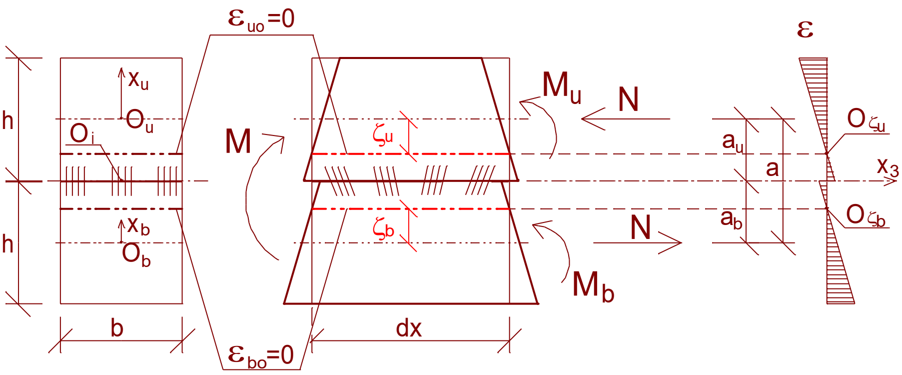


***Рисунок 3** – Случай податливой связи между составляющими элементами*

Как видно, выражение (19) – есть квадратичная, а (20) – линейная функции ζ_0.

Запишем выражения нулевых относительных деформации составляющих элементов

$$\varepsilon_{u0} = -\left[\frac{N}{EA_0} + \frac{M_u}{EJ_0}(-\zeta_0)\right] = 0, \tag{23.1}$$

$$\varepsilon_{b0} = \frac{N}{EA_0} - \frac{M_b}{EJ_0}\zeta_0 = 0, \tag{23.2}$$

Далее в силу симметрии (22.1-2), получаем

$$N = M\frac{S_{0(\zeta)}}{J_i^{(III.2)}}, \tag{24}$$

$$M_g = M_d = M\frac{J_0}{J_i^{(III.2)}}. \tag{25}$$

Взаимное смещение элементов представляется в виде

$$\delta_{III}(\zeta_0) = \underline{\varepsilon_u} - \overline{\varepsilon_b} = \frac{M}{E\ J_i^{(III.2)}}2(a_0 - \zeta_0) \tag{26}$$

и, кроме того,

$$\delta_I < \delta_{III}(\xi) < \delta_{II} = 0. \tag{27}$$

Здесь граничные переходы также очевидны.

2.3. Нормальные σ_{22} и касательные σ_{23} напряжения

Для симметричного тензора напряжений имеем

$$\sigma_{32} = \sigma_{23}. \tag{28}$$

Величина искомых напряжений зависит от ординаты отсекаемой части сечения $x_{(u)}$ (рис. 4):

$$\sigma_{23} = \sigma_{23}(x_u), \qquad \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_u). \tag{29.1-2}$$

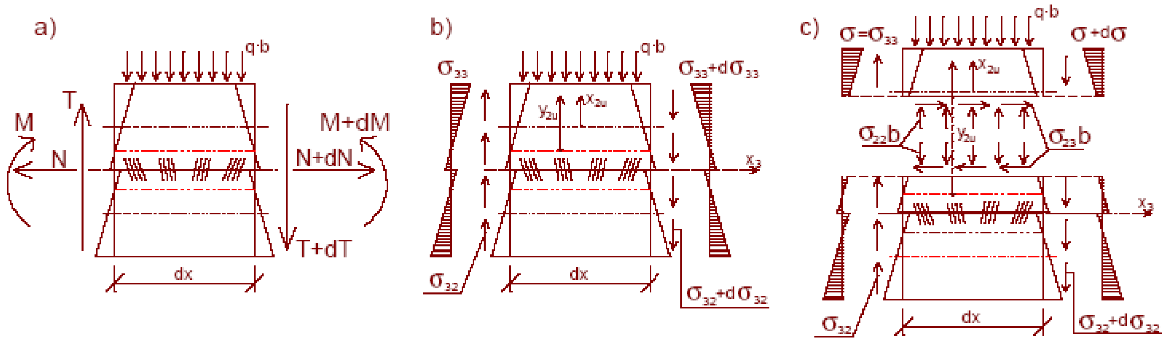


Рисунок 4 *– Внутренние силы и напряжения*

Обозначим (рис. 5) через $\overline{A} = A(x_u)$ часть поверхности поперечного сечения, отсекаемую горизонтальной плоскостью. Здесь имеем постоянную ширину балки $b(x_g) = b$.

Уравнения равновесия отсеченной части сечения (рис.4) запишем в виде

$$\Sigma x_3: \qquad \sigma_{23}\ dx\ b + \int_{\overline{A}} d\sigma\ dA = 0\,, \tag{30}$$

$$\Sigma x_{2g}: \qquad (q - \sigma_{22})\,dx\ b + \int_{\overline{A}} d\sigma_{32}\ dA = 0\,, \tag{31}$$

при

$$[q] = \left[\frac{N}{m^2}\right]. \tag{31.1}$$

Интеграл в уравнении (30) содержит (рис. 5)

$$\sigma = \sigma_g = -\frac{N}{A_0} - \frac{M_g}{J_0}x_g = -\frac{M}{J_i^{(III.2)}}(x_g + \zeta_0) = -\frac{M}{J_i^{(III.2)}}y_g\,, \tag{32}$$

если $\quad y_g = x_g + \zeta_0$ и $\quad y_g \in \left\langle (\zeta_0 - a_0);\, [h - (a_0 - \zeta_0)]\ \right\rangle;$ (32.1-2)

получаем

$$\int_{\overline{A}} d\sigma\ dA = -\frac{dM}{J_i^{(III.2)}} \int_{\overline{A}} y_g\ dA = -\frac{dM}{J_i^{(III.2)}} \overline{S}_{(\zeta)}, \tag{33}$$

где $\overline{S}_{(\zeta)}$ – статический момент отсеченной части $\overline{A}$ относительно оси ζ_u. В предельных случаях получаем

$$\lim_{\zeta \to 0} \overline{S}_{(\zeta)} = 0 \qquad \text{(центр тяжести)}, \tag{33.1}$$

$$\lim_{\zeta \to a_0} \overline{S}_{(\zeta)} = S_{0(i)}\,. \tag{33.2}$$

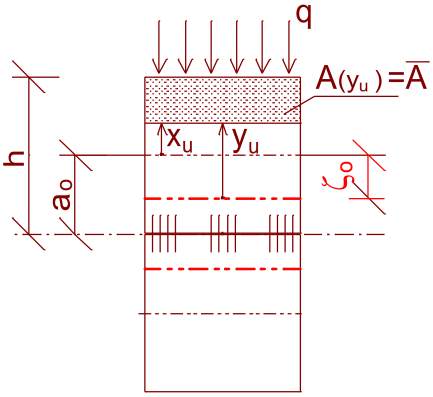


Рисунок 5

Используя (30), (32) и (32.1-2), получим

$$\sigma_{23}\left(y_{2g}\right)=\frac{dM}{dx}\frac{1}{b}\frac{\overline{S}_{(\zeta)}}{J_i^{(III.2)}}=\frac{T}{b}\frac{\overline{S}_{(\zeta)}}{J_i^{(III.2)}}\,. \tag{34}$$

Интенсивность силы, действующей на связи в шве, получаем в виде

$$dQ = dx\,b\,\sigma_{23}\left(y_{2g}\right), \tag{34.1}$$

и отсюда

$$Q\left(y_g\right)=\frac{\overline{S}_{(\zeta)}}{J_i^{(III.2)}}\int_0^x T\,dx\,. \tag{34.2}$$

Принимая среднюю величину касательной силы $T_{eff.} = const$, на длине отрезка "e" балки, в силу (34.2), можно написать

$$Q_{eff.(e)} = T_{eff.}\frac{\overline{S}_{(\zeta)}}{J_i^{(III.2)}}\,e\,. \tag{34.3}$$

Из (31), (27) и (34) получаем формулу σ_{22}

$$\sigma_{22}\left(y_u\right)=q+\frac{1}{b}\frac{d}{dx}\int_{\overline{A}}\sigma_{32}\,dA=q+\frac{1}{J_i^{(III.2)}b}\frac{d^2M}{dx^2}\int_{\overline{A}}\overline{S}_{(\zeta)}\,dA\,; \tag{35.1}$$

или

$$\sigma_{22}\left(y_u\right)=q\left[1-\frac{1}{J_i^{(III.2)}b}\int_{\overline{A}}\overline{S}_{(\zeta)}\,dA\right]. \tag{35.2}$$

Эти результаты заключают первую часть работы.

3. Часть вторая

3.1. Сталежелезобетонная мостовая балка

Более 50 лет составные балки используются в пролётных строениях мостов. Чаще других используются балки с бетонной плитой в сжатой зоне и двутавровой стальной балкой – в растянутой. Начнем анализ именно с такой балки. Введем обозначения (рис.6): индекс "c" – означает бетон, а индекс "s" – сталь.

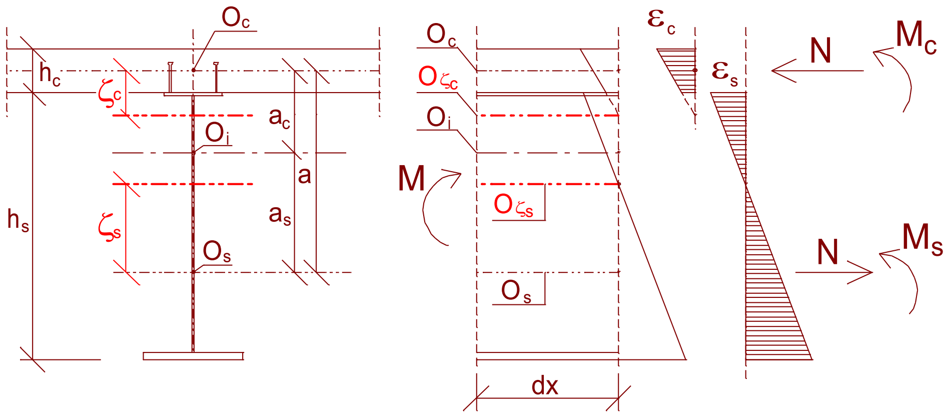


Рисунок 6 *– Сталежелезобетонная балка. Деформации изгиба*

Площадь поперечного сечения составной балки:

$$A_i = A_c \frac{1}{n} + A_s = A_c^{'} + A_s\,, \tag{36}$$

причем

$$n = \frac{E_s}{E_c}\,; \tag{36.1}$$

Момент инерции

$$J_i = \frac{J_c}{n} + J_s + \frac{A_c}{n}(a_c)^2 + A_s(a_s)^2 = J_c^{'} + J_s + S_{c(i)}^{'} a_c + S_{s(i)} a_s = J_c^{'} + J_s + S_{0(i)} a\,, \tag{37}$$

где $S_{c(i)}^{'} = S_{s(i)} = S_{0(i)}$ (37.1) – статические моменты; $S_{c(i)}^{'}$ – статический момент поперечного сечения бетона поделен на "n" (36.1) и $S_{s(i)}$ – статический момент поперечного сечения стальной части, все эти моменты вычислены относительно оси O_i.

В случае чистого изгиба получаем:

- нулевые оси относительных деформации составляющих элементов

$$\varepsilon_{c0} = \varepsilon_{c(\zeta_c)} = -\frac{N}{E_c A_c} - \frac{M_c}{E_c J_c}(-\zeta_c) = 0\,, \tag{38}$$

$$\varepsilon_{s0} = \varepsilon_{s(\xi_s)} = \frac{N}{E_s A_s} - \frac{M_s}{E_s J_s}\zeta_s = 0\,, \tag{39}$$

- с помощью (3.3) и (38-39) находим внутренние силы:

$$N = M\frac{S_{c(\zeta_c)}\ S_{s(\zeta_s)}}{J_c S_{s(\zeta_s)} + J_s S_{c(\zeta_c)} + a\ S_{c(\zeta_c)} S_{s(\zeta_s)}} = M\frac{S\_S}{K}, \tag{40.1}$$

или

$$N' = N = M\frac{S'_{c(\zeta_c)} S_{s(\zeta_s)}}{J'_c S_{s(\zeta_s)} + J_s S'_{c(\zeta_c)} + a\ S'_{c(\zeta_c)} S_{s(\zeta_s)}} = M\frac{S'\_S}{K'}; \tag{40.2}$$

где $S_{c(\zeta_c)}$, $S'_{c(\zeta_c)}$, $S_{s(\zeta_s)}$ статические моменты относительно осей ζ_c и ζ_s сответственно для бетона и стали,

$$M_c = M\frac{J_c}{K} S_{s(\zeta_s)} = M\frac{J'_c}{K'} S_{s(\zeta_s)}, \quad M_s = M\frac{J_s}{K} S_{c(\zeta_c)} == M\frac{J_s}{K'} S'_{c(\zeta_c)}; \tag{41-42}$$

- взаимное смещение в шве (рис. 6.)

$$\delta = \underline{\varepsilon_c} - \overline{\varepsilon_s} = \frac{M}{E_s K'}\left[S'_{c(\zeta_c)}\left(a - \frac{h_c}{2} - \zeta_s\right) + S_{s(\zeta_s)}\left(\frac{h_c}{2} - \zeta_c\right)\right]. \tag{43}$$

На рис. 6. повороты сечений бетона и стали неодинаковы. Действительно, если записать кривизны для составляющих элементов

$$(\rho_c)^{-1} = \frac{M_c}{E_c J_c} = M\frac{S_{s(\zeta_s)}}{E_c K'}, \qquad (\rho_s)^{-1} = \frac{M_s}{E_s J_s} = M\frac{S'_{b(\xi_b)}}{E_s K'}, \tag{44.1-2}$$

- можно убедиться в том, что они отличны

$$(\rho_b)^{-1} \neq (\rho_s)^{-1}. \tag{44.3}$$

В случае неподатливых связей получаем –

$$\lim_{\left\{\substack{\zeta_b \to a_b \\ \zeta_s \to a_s}\right\}} (\rho_b)^{-1} = \lim_{\left\{\substack{\zeta_b \to a_b \\ \zeta_s \to a_s}\right\}} = (\rho_s)^{-1} = (\rho_i)^{-1}. \tag{44.4}$$

3.2. Определение касательных усилий

Подобно схеме на рис. 4, отсечем горизонтальной плоскостью часть сечения балки, но теперь уже в шве балки. Здесь действуют напряжения σ_{32} и σ_{22}. Напряжения $\sigma_{33(c)}$ в бетоне определяются формулой

$$\sigma_c = \sigma_{33(c)} = -M\frac{S_{s(\zeta s)}}{K} y_c, \tag{45.1}$$

при $\quad y_c = x_c + \zeta_c, \qquad y_c \in \left\langle\left(\zeta_c - \frac{h_c}{2}\right); \left(\zeta_c + \frac{h_c}{2}\right)\right\rangle.$ (45.2)

Из (30) получаем

$$\sigma_{23}(y_c) = \frac{T}{b_c}\frac{\overline{S}_{c(\zeta_c)}\ S_{s(\zeta_s)}}{K} = \frac{T}{b_b}\frac{\overline{S}\ \_S}{K}, \tag{45.3}$$

где

$$\overline{S}_{c(\zeta_c)}(y_c) = \int_{\overline{A}} y_c\ dA = \frac{\overline{A}}{2}\left[y_c + \left(\frac{h_c}{2} + \zeta_c\right)\right] = \frac{b_c}{2}\left[\left(\frac{h_c}{2} + \zeta_c\right)^2 - (y_c)^2\right]. \tag{45.4}$$

По (31) и (31.1), используя (45.4), $\sigma_{22(c)}$ выразим в виде

$$\sigma_{22\,c}(y_c) = q + \frac{1}{b_c}\int_{\overline{A}} \frac{d\sigma_{32}}{dx}\,dA = q + \frac{1}{(b_c)^2}\frac{d^2M}{dx^2}\frac{S_{s(\zeta_s)}}{K}\int_{\overline{A}} \overline{S}_{c(\zeta_c)}(y_c)\,dA =$$

$$= q\left[1 - \frac{1}{b_b}\frac{S_{s(\zeta_s)}}{K}\int_{\overline{A}} \overline{S}_{c(\zeta_c)}(y_c)\,dA\right], \tag{46}$$

Здесь отметим, что в шве ширина бетона b_c отличается от ширины верхней стальной полки b_s. Далее будем считать, что положение b_s связано с ординатой соотношением

$$y_c := \underline{\chi} = \zeta_c - \frac{h_c}{2}, \tag{47}$$

что позволяет записать выражения для σ_{23} и σ_{22} в плоскости шва относительно верхней поверхности бетонной плиты

$$\sigma_{23(cont.)} = \frac{T}{b_s}\frac{S\ \_S}{K}, \tag{48}$$

отсюда находим поперечную силу

$$Q_{(cont.)} = b_s\int_0^x \sigma_{23_{(cont.)}}dx = \frac{S\ \_S}{K}\int_0^x T\ dx; \tag{49}$$

В случае, если мы знаем в среднем величину касательной силы $T_{eff.} = \text{const}$, на длине отрезка "e" получаем

$$Q_{miar.(e)} = T_{miar.}e\frac{S\ \_S}{K}. \tag{50.2}$$

Для нормальных вертикальных напряжений σ_{22} находим

$$\sigma_{22(cont.)} = q\frac{b_c}{b_s}\left[1 - \frac{b_c}{6}\frac{S_{s(\zeta_s)}}{K}\left[(2h_c)^2\chi - 2h_c\zeta\chi - (h_c)^3\right]\right]; \tag{51}$$

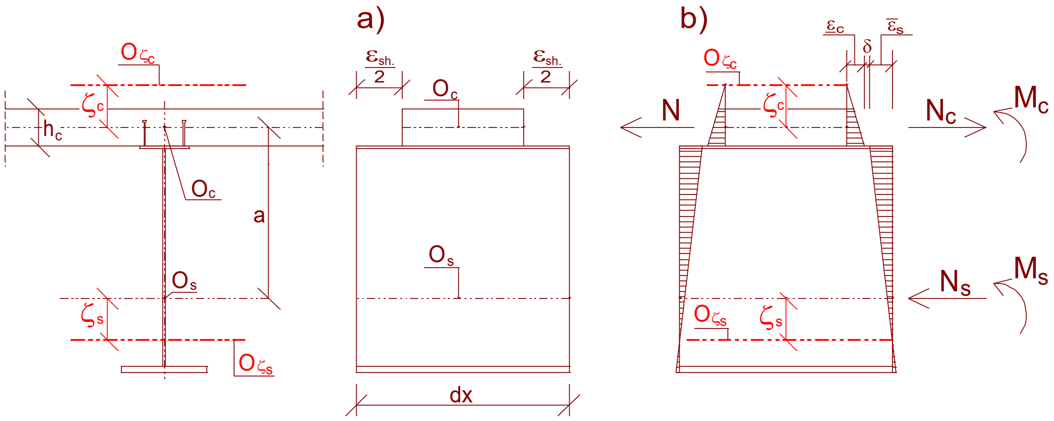
$$\left(\sigma_{22(cont.)} = q\frac{b_c}{b_s}\left\{1 - \frac{b_c}{6}\frac{S_{s(\zeta_s)}}{K}\left[\overline{\chi}^2\left(2\overline{\chi} - \underline{\chi}\right) + \left(\underline{\chi}\right)^3\right]\right\}\right), \tag{51.1}$$

где $$\overline{\chi} = \zeta_c + \frac{h_c}{2}, \quad \underline{\chi} = \zeta_c - \frac{h_c}{2}. \tag{51.2-3}$$

3.3. Усадка бетона

Усадка бетона – важный фактор, учитываемый при проектировании мостовых балок. Средняя возможная усадка может быть описана такими же соотношениями, что и тепловые деформации, которые возникают при равномерном нагревании или охлаждении плиты. Наиболее распространен метод, предложенный Биркландом [9].

Здесь в расчете напряжений усадки принято, что деформация ε_{sh} – постоянная по толщине плиты. Пусть также известен график деформации (рис. 7, b). Предполагая, что начальная конфигурация отвечает свободной усадке – рис. 7. a, это случай отсутствия связи в шве. Теперь найдем такие внутренние силы, которые переводят начальную конфигурацию в конфигурацию после деформации.



a) начальная конфигурация, b) график деформации, внутренние силы.

Рисунок 7 *– Сталежелезобетонная балка – влияние усадки*

Имеем 5 неизвестных: N, N_b, N_s, M_b, M_s, которые найдем из двух уравнений равновесия и двух уравнений совместности деформации, а также из условия

$$\delta = 0\,. \tag{52}$$

Получим

$$\Sigma M_{O_b}:\ N_s a = M_b + M_s\,, \tag{53}$$

$$\Sigma M_{O_s}:\ Na = N_b a - \left(M_b + M_s\right), \tag{54}$$

Аналогично (38-39) запишем

$$\varepsilon_{b0} = \varepsilon_{b(\zeta_b)} = \frac{N_b}{E_b A_b} - \frac{M_b}{E_b J_b}\zeta_b = 0\,, \tag{38.1}$$

$$\varepsilon_{s0} = \varepsilon_{s(\zeta_s)} = -\frac{N_s}{E_s A_s} - \frac{M_s}{E_s J_s}\left(-\zeta_s\right) = 0\,, \tag{39.1}$$

Из этих уравнений получим:

$$M_b = N_b \frac{J_b}{A_b \zeta_b} = N_b \frac{J_b}{S_{b(\zeta_b)}} = N_b \frac{J_b^{'}}{S_{b(\zeta_b)}^{'}}\,, \tag{55}$$

$$M_s = N_s \frac{J_s}{A_s \zeta_s} = N_s \frac{J_s}{S_{s(\zeta_s)}} . \quad (56)$$

Подставив (55-56) в (53-54) получим

$$N_b = N_s \frac{a\ S^{'}\_S - J_s S^{'}_{b(\zeta_b)}}{J^{'}_b S_{s(\zeta_s)}} . \quad (57)$$

Для удобства введем обозначение

$$K^{'}_{sh.} = a\ S^{'}\_S - \left(J_s S^{'}_{b(\zeta_b)} + J^{'}_b S_{s(\zeta_s)}\right) \quad (58)$$

и найдем

$$N_b = N \frac{a\ S^{'}\_S - J_s S^{'}_{b(\zeta_b)}}{K^{'}_{sh.}} , \quad (59)$$

$$N_s = N \frac{J^{'}_b S_{s(\zeta_s)}}{K^{'}_{sh.}} , \quad (60)$$

$$M_b = N \frac{J^{'}_b}{K^{'}_{sh.}} \left(a S_{s(\zeta_s)} - J_s\right) \quad (61)$$

и

$$M_s = N \frac{J^{'}_b J_s}{K^{'}_{sh.}} . \quad (62)$$

Используя условие совместности деформаций, получаем

$$\varepsilon_{sk.} - \delta = \underline{\varepsilon}_b + \overline{\varepsilon}_s = \frac{N}{E_s K^{'}_{sh.} \kappa} , \quad (63)$$

где κ^{-1} определяется выражением

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{a\,S^{'}\_S - J_s\ S^{'}_{b(\zeta_b)}}{A^{'}_b} + \frac{J^{'}_b S_{s(\zeta_s)}}{A_s} + \frac{1}{2}\left[h_b\left(a\ S_{s(\zeta_s)} - J^{'}_b - J_s\right) + 2aJ^{'}_b\right], \quad (64)$$

Из (64) с учетом (52) получим:

$$N = \varepsilon_{sk.} E_s K^{'}_{sh.} \kappa . \quad (65)$$

Подстановка силы N (65) в (59-62) дает решение поставленной проблемы.

4. *Пример*

Приведем пример, показывающий влияние податливости связей на кривизну составной балки. Запишем обычные выражения усилий в элементах составной балки

$$\overline{M}_b = M \frac{J^{'}_b}{J_i} , \qquad \overline{M}_s = M \frac{J_s}{J_i} , \qquad \overline{N} = M \frac{S_{0(i)}}{J_i} . \quad (66.1\text{-}3)$$

Полученные из (66.1-3) кривизны равны

$$\frac{(\overline{\rho}_b)^{-1}}{(\overline{\rho}_s)^{-1}} = 1 . \quad (44.4.1)$$

Теперь, используя изложенную методологию для случая податливых связей бетона, получаем

$$\zeta_s = a_s , \qquad \zeta_b = \mu\, a_b , \text{ если } \mu \in (0;1) \quad (67.1\text{-}3)$$

Используя (40.2), для $K^{'}$ запишем

$$K^{'} = J_b^{'} S_{s(\zeta_s)} + J_s S_{b(\zeta_b)}^{'} + a\ S_{b(\zeta_b)}^{'} S_{s(\zeta_s)} \to S_{0(i)} \left[J_b^{'} + \mu \left(J_s + a S_{0(i)} \right) \right] \ . \qquad (68)$$

и отсюда, используя (40.2), (41-2), получаем

$$M_b = M \frac{J_b^{'}}{J_b^{'} + \mu \left(J_s + a\, S_{0(i)} \right)} , \qquad M_s = M \frac{\mu\, J_s}{J_b^{'} + \mu \left(J_s + a\, S_{0(i)} \right)} , \qquad (69.1\text{-}2)$$

$$N = \frac{\mu\, S_{0(i)}}{J_b^{'} + \mu \left(J_s + a\, S_{0(i)} \right)} \ . \qquad (69.3)$$

Сравнивая формулы (66.1-3) и (69.1-3), можем записать

$$\frac{M_b}{\overline{\overline{M}}_b} = \frac{J_b^{'} + J_s + a\, S_{0(i)}}{J_b^{'} + \mu \left(J_s + a\, S_{0(i)} \right)} \qquad \text{и} \qquad (70.1)$$

$$\frac{M_s}{\overline{\overline{M}}_s} = \frac{N}{\overline{\overline{N}}} = \frac{\mu \left(J_b^{'} + J_s + a\, S_{0(i)} \right)}{J_b^{'} + \mu \left(J_s + a\, S_{0(i)} \right)} \ . \qquad (70.2)$$

Из выражения (44.4.1) следует

$$\frac{\left(\rho_b \right)^{-1}}{\left(\rho_s \right)^{-1}} = \frac{1}{\mu} \ . \qquad (70.3)$$

Выводы

1. Представлена теория расчета составных балок. Кроме рассмотренных здесь сталежелезобетонных балок теория может также быть применена и к составным деревянным балкам и из других материалов.

2. Введенная здесь геометрическая мера ζ_c и ζ_s податливости анкерных устройств может рассматриваться в более широком толковании, а именно эти величины функционально связаны с упругими и пластическими свойствами бетона, с частичным нарушением связи балки с плитой, а также с формой самих анкеров. Величины ζ_c и ζ_s позволяют описать статические и динамические процессы нагружения, ползучесть бетона, старение, тепловые воздействия и др. Все это в общем виде можно написать так:

$$\zeta_c = \zeta_c \left(t, T, f_{cc}, f_{y(connect.)}, \alpha_c \right) \quad \varsigma_S = \xi_S (t, T, f_y, \alpha_S) \ , \qquad (71\text{-}72)$$

где α_c, α_S – коэффициенты влияния формы анкеров на область бетона,

$f_{y(connect)}, f_y$ –пределы текучести соответственно материала анкеров и металла балки.

В некоторых случаях можно считать, что $\xi_S \to a_S$. (67.1)

Величины, входящие в выражения (71-72), могут быть определены по результатам экспериментов – других исследователей или опытов, запланированных в этой работе.

3. Отличное от нуля смещение δ рассмотрено в первой части статьи, но в общем случае $\delta \to 0$. Точно также известное условие $C_i = Q/\delta$ (см. например, [3]) тоже может быть учтено, оно приводит к переменной величине сдвигающей силы.

4. Проблема усадки проанализирована в предположении, что вначале $\delta = 0$ (52). Альтернативный подход не должен использоваться как неприемлемый по техническим причинам.

5. Используя в качестве основного условия определения положения нейтральной оси условия (1.1-2) или (38-39) либо (38.1), (39.1) мы избегаем требования равенств кривизн (44.41). Таким образом, мы имеем дело с плоскими поверхностями бетонного и стального элементов, проскальзывающих под разными углами.

6. Перечисленные выше преимущества должны рассматриваться вместе с недостатком описания момента инерции. В представленным подходе соотношения (69.1-3) и (40.1-2), (41-2), (23-24) имеют одинаковую силу. На их основе нельзя получить единственное выражение для момента инерции. С другой стороны, точка зрения автора наиболее удобна для расчета рядя задач исчерпания несущей способности от действия эксплуатационных нагрузок. Здесь используются обобщенные выражения (18-19) и (30) или

$$J_i = J_b^{'} + J_S + S_{b(\xi b)} a_b + S_{S(\xi s)} a_s, \tag{73.1}$$

$$J_i = J_b^{'} + J_s + S_{b(\xi b)} \xi_b + S_{s(\xi s)} \xi_S \tag{73.2}$$

Причины этого положения следуют из описанного выше физического смысла задачи – жесткость составных элементов может быть представлена суммой жесткости стальной балки и степенью увеличения этой жесткости за счет включения бетонной железобетонной плиты.

Окончательное решение проблемы требует дальнейших теоретических и экспериментальных исследований.

Литература

1. Melan J., *Brückenbau I*, Leipzig-Wien, 1922
2. Sattler K., *Theorie der Verbundkonstruktionen*, Ernst u. Sohn, Berlin 1953.
3. Ржаницын А.Р., *Теория составных стержней строительных конструкций*, Стройиздат, 1948.
4. Ржаницын А. Р., *Составные стержни и пластинки*, Стройиздат, 1986.
5. Johnson R.P., Buckby R.J., Composite Structures of Steel and Concrete, Granada, 6 London, New York, 1979.
6. Sabinis G.M., Handbook of Composite Construction Engineering, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979.
7. Łagoda M.: Wpływ podatności zespolenia na rozkład sił wewnętrznych. Konferencja naukowo – techniczna „Mosty zespolone", Kraków 1998.
8. Duan L., Saleh Y., Altman S., Steel-Concrete Composite I-Ggirder Bridge in Bridge Engineering Handbook, Ed. Wai-Fah Chen and Lian Duan, Boca-Raton: CRC Press, 2000.
9. Birkeland H.W., *Differential Shrinkage in Composite Beams*, JACI, No 11, V-31, 1960.