УДК 624.042.8

ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ НЕРОЗРІЗНИХ КОНСТРУКЦІЙ В СИСТЕМІ СКІНЧЕННИХ АВТОМАТІВ

Распопов О.С.
Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Теоретичне дослідження вимушених коливань ланцюгових стрижневих систем з розподіленими параметрами пов'язане з суттєвими складнощами та, як правило, виконується з використанням спрощених дискретних моделей або різноманітних наближених методів [1, 2]. Додаткові труднощі виникають при одночасному врахуванні розподілених та зосереджених мас, пружних закріплень та шарнірів.

Для нерозрізних конструкцій ефективними є алгоритми, які використовують топологічну інформацію про систему та відповідні їм методи розрахунку, що пов'язані з геометричною побудовою структури фазових просторів [3]. Використання логічних операцій дозволяє формальним шляхом визначити поведінку складної механічної системи, яка знаходиться під дією періодичних зовнішніх сил.

Для вільних просторових коливань аналогічну задачу розв'язано у роботі [4]. В даній статті на основі скінченних автоматів та булевої алгебри запропоновано абстрактний опис вимушених коливань нерозрізних балкових конструкцій.

Розглянемо k-й та $k+1$-й прогони багатопрогонової нерозрізної балки, яка складається з кусково-безперервних ділянок-стрижнів $1,\ 2,\ \ldots,\ p$, що знаходяться під впливом періодичних сил або моментів на границях ділянок (рис. 1).

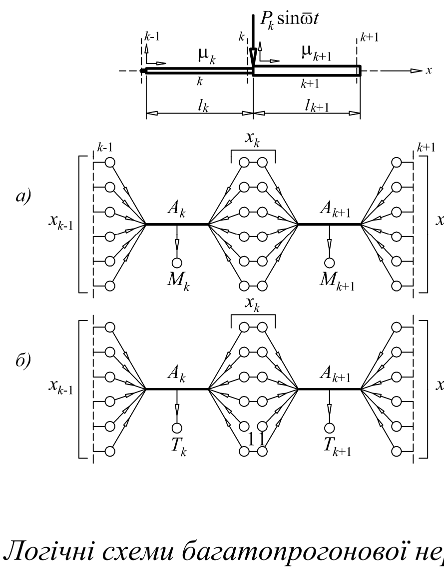

***Рисунок 1** – Логічні схеми багатопрогонової нерозрізної балки*

В результаті декомпозиції такої системи отримаємо множину її більш простих підсистем 1, 2, …, p, які діють одночасно (синхронно) з частотою ϖ. В свою чергу, представимо їх взаємно пов’язаними підавтоматами A_1, A_2, …, A_p в єдину логічну схему у вигляді скінченного нетривіального автомату A.

Сукупність значень всіх виходів z_ν автомату A визначається виходами його підавтоматів, що представлені асоційованими матрицями V_1, M_2, …, M_{p-1}, V_p, які описують вільні коливання системи, та асоційованими матрицями W_1, T_2, …, T_{p-1}, W_p, які враховують вплив зовнішніх сил.

Таким чином, невідомі початкові параметри можуть бути знайдені за правилом Крамера [5] у вигляді відношення визначників D_{zk} та D_z, які рівні послідовному добутку відповідних асоційованих матриць кожного з p ділянок системи

$$x_k = \frac{D_{zk}}{D_z} = \frac{W_1 \prod_{k=2}^{p-1} T_k W_p}{V_1 \prod_{k=2}^{p-1} M_k V_p}. \tag{1}$$

Кожен з вхідних параметрів підавтомата A_k ($k = 1, 2, \ldots, p$), який знаходиться в стані силового або кінематичного збурення, може бути описаний функцією у вигляді двозначного предикату [6]. Якщо задано будь-яке збурення в перерізі балки k, то предикат $F(x_k)$ набуває значення 1, якщо збурення немає – значення 0. Та, навпаки, для параметра, який підлягає обчисленню, предикат $F(x_k)$ набуває значення 0, для інших випадків – 1.

Відмічені залежності характерні для логічної операції рівнозначності (еквіваленції) та виражають одну з основних властивостей булевих функцій [6, 7]. У символах булевої алгебри ця властивість для збурених або обчислюваних параметрів k-ї та $k+1$-ї ділянки балки можна виразити наступним чином

$$x_k^{(i)} \sim x_{k+1}^{(i)}. \tag{2}$$

Інші однойменні параметри, як і у випадку вільних коливань пов’язані логічними операціями заперечення (інверсії):

$$x_k^{(i)} = \overline{x}_{k+1}^{(i)}. \tag{3}$$

В цілому, зв'язок між рівнозначними кодами елементів, що з’єднуються, описуються відомими законами логічного протиріччя та виключеного третього [6]:

$$\left(X_k \sim X_{k+1}\right) \cap \left(\overline{X_k \sim X_{k+1}}\right) = 0, \tag{4}$$

або

$$\left(X_k \sim X_{k+1}\right) \cup \left(\overline{X_k \sim X_{k+1}}\right) = 1 . \tag{5}$$

Для автомата, який моделює вузол конструкції з кількох стрижнів, реалізуються ті ж логічні принципи рівнозначності та заперечення, що і в перерізах балки, які розділяють ділянки.

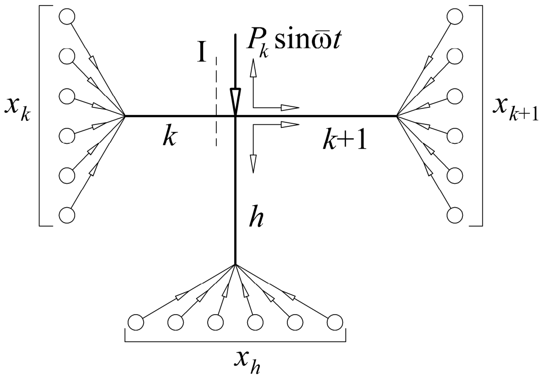

Рисунок 2 *– Логічна схема прямокутного вузла рами*

Наприклад, якщо до вузла прямокутної рами H, в якому стикуються стрижні k, $k+1$, h, прикладено вертикальну періодичну силу $P\sin\varpi t$ (рис. 2), то можливі стани вхідних параметрів у перерізах I зліва від вузла визначатимуться наступними співвідношеннями:

- для збурених параметрів:

$$x_k^{(i)} = x_{k+1}^{(i)} = x_h^{(i)} = 1 ; \tag{6}$$

- для параметрів, що визначаються:

$$x_k^{(i)} = x_{k+1}^{(i)} = x_h^{(i)} = 0 . \tag{7}$$

У зв’язку з тим, що ці параметри є рівнозначними, для них має місце закон асоціативності [5, 6]:

$$x_k^{(i)} \sim x_{k+1}^{(i)} \sim x_h^{(i)} . \tag{8}$$

Якщо відомі інші вхідні параметри k-го стрижня, то відповідні параметри стрижнів $k+1$ та h можуть бути отримані в результаті логічних операцій, які описують вільні коливання вузла H [4]:

- для параметрів (К) при $x_k^{(i)} = 0$ та (С) при $x_k^{(i)} = 1 \Rightarrow x_{k+1}^{(i)} = \overline{x}_h^{(i)}$;

- для параметрів (К) при $x_k^{(i)} = 1 \Rightarrow x_{k+1}^{(i)} = x_h^{(i)} = 0$ та для параметрів (С) при $x_k^{(i)} = 0 \Rightarrow x_{k+1}^{(i)} = x_h^{(i)} = 1$.

Зв’язки між рівнозначними кодами елементів, що з’днуються у вузлі H, характеризуються виразами, аналогічними (4), (5):

$$\left(X_k \,\square\, X_{k+1} \,\square\, X_h\right) \cap \left(\overline{X_k \,\square\, X_{k+1} \,\square\, X_h}\right) = 0;$$
$$\left(X_k \,\square\, X_{k+1} \,\square\, X_h\right) \cup \left(\overline{X_k \,\square\, X_{k+1} \,\square\, X_h}\right) = 1. \qquad (9)$$

В такий же спосіб вчиняємо і для вузлів конструкції, в яких стикується більша кількість стрижнів. Правила отримання кодових комбінацій для їх граничних параметрів будуть аналогічними до попереднього випадку. Умови рівнозначності або заперечення між кінцевими параметрами k -го стрижня та вузла H приводяться до вигляду $X_k \,\square\, X_H$ або $X_k = \overline{X}_H$. Аналіз кількості перестановок кодів та станів підавтоматів в таких перерізах необхідно проводити в кожному конкретному випадку за допомогою таблиць переходів.

Припустимо, потрібно визначити амплітуди кута повороту та поперечної сили $\varphi_z(0)$, $N_y(0)$ на лівій опорі та амплітуди прогину і згинального моменту $u_y\left(\frac{l}{2}\right)$, $M_z\left(\frac{l}{2}\right)$ в перерізі $k=1$ для вимушених згинальних коливань шарнірнообпертої балки постійного перерізу, яка знаходиться під впливом пульсувальної сили $P_1 \sin \varpi t$ всередині прогону (рис. 1). Відповідні логічні схеми підавтоматів A_1, A_2 представлено на рис. 3.

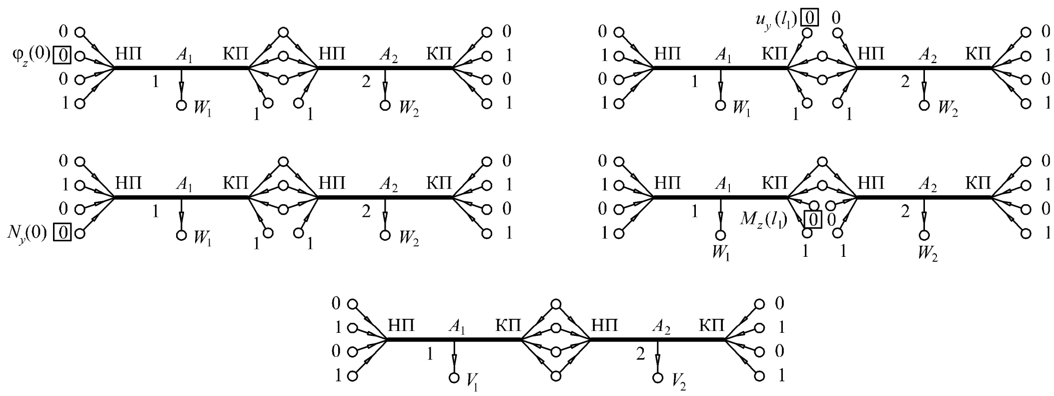

***Рисунок 3** – Логічні схеми шарнірнообпертої балки*

Розділимо балку на дві однакові ділянки довжиною $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ та складемо таблицю переходів (табл. 1) для визначення характеристичних функцій скінченного автомату, котрий описує дану систему. При цьому, як і у випадку вільних коливань [4], почергова зміна кодів граничних параметрів стрижня 1 буде відповідати зміні кодів НП стрижня 2 з урахуванням логічного заперечення у зв’язаних параметрах двох стрижнів. Ці параметри в табл. 1 позначено однойменними латинськими літерами.

***Таблиця 1** – Таблиця переходів*

Пара-метри		$\varphi_z(0)$				$N_y(0)$				$u_y(l_1)$			$M_z(l_1)$		
x_ν	s_ν	*ст. 1* *ст. 2*	*1*	*2*	*3*	*ст. 1* *ст. 2*	*1*	*2*	*3*	*ст. 1* *ст. 2*	*1*	*2*	*ст. 1* *ст. 2*	*1*	*2*
НП	К	0 *a* 0 *b*	0 1 0 0	0 0 0 1	0 0 0 0	0 *a* 1 *b*	0 1 1 0	0 0 1 1	0 0 1 0	0 0 1 *b*	0 0 1 1	0 0 1 0	0 *a* 1 *b*	0 1 1 0	0 0 1 1
	С	0 *c* 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 1 1	0 *c* 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 0 1	0 *c* 1 1	0 0 1 1	0 1 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1
КП	К	*a* 0 *b* 1	0 0 1 1	1 0 0 1	1 0 1 1	*a* 0 *b* 1	0 0 1 1	1 0 0 1	1 0 1 1	0 0 *b* 1	0 0 0 1	0 0 1 1	*a* 0 *b* 1	0 0 1 1	1 0 0 1
	С	*c* 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 1	0 0 1 1	*c* 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 1	0 0 1 1	*c* 0 1 1	1 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1

Значення функції f_z для $D_z = V_1 V_2$ визначається елементом асоційованої матриці M_{xy} (табл. 2 [4]) з кодом граничних умов 0101–0101

$$D_z = \frac{l^2}{\lambda_y^2} B = \frac{l^2}{\lambda_y^2} \operatorname{sh}\lambda_y \sin\lambda_y . \tag{10}$$

Вираз D_{zk} може бути представлений у формі добутку двох векторів W_1, W_2 з характеристиками стрижнів $1,\ 2$. Обираючи функції f_z для підавтоматів A_1, A_2 та з табл. 2 [4, 8] у відповідності до кодів табл. 3 отримаємо:

- для визначення $\varphi_z(0)$:

$$W_1 = \left\| \frac{l_1^3}{EJ_{z1}\lambda_{y1}^3} V_1 \quad \frac{l_1^2}{EJ_z\lambda_{y1}^2} U_1 \quad \frac{l_1}{\lambda_{y1}} T_1 \right\|;\ W_2 = P_1 \left\{ \frac{l_2}{\lambda_{2y}} C_2 \quad \frac{l_2^2}{\lambda_{2y}^2} B_2 \quad \frac{l_2^3}{EJ_{z2}\lambda_{2y}^3} A_2 \right\},$$

або, після перетворень:

$$D_{zk} = \frac{P_1 l^4}{2EJ_z\lambda_y^4} \left(\operatorname{sh}\lambda_y \sin\frac{\lambda_y}{2} - \sin\lambda_y \operatorname{sh}\frac{\lambda_y}{2} \right); \tag{11}$$

- для $N_y(0)$ вектор-стовпець W_2 залишається без змін, а для W_1 запишемо:

$$W_1 = -\left\| \frac{l_1}{\lambda_{1y}} T_1 \quad S_1 \quad \frac{EJ_z\lambda_{1y}}{l_1} V_1 \right\|,$$

та, відповідно,

$$D_{zk} = -\frac{P_1 l^2}{2\lambda_y^2} \left(\operatorname{sh}\lambda_y \sin\frac{\lambda_y}{2} + \sin\lambda_y \operatorname{sh}\frac{\lambda_y}{2} \right). \tag{12}$$

Аналогічним чином визначаємо вирази D_{zk} для параметрів $u_y\left(\frac{l}{2}\right)$ та $M_z\left(\frac{l}{2}\right)$:

$$D_{zk} = P_1 \left\| \frac{l_1^3}{EJ_{z1}\lambda_{y1}^3} A_1 \quad \frac{l_1^2}{\lambda_{y1}^2} B_1 \right\| \left\| \begin{matrix} \frac{l_2^2}{\lambda_{y2}^2} B_2 \\ \frac{l_2^3}{EJ_{z2}\lambda_{y2}^3} A_2 \end{matrix} \right\|; \; D_{zk} = P_1 \left\| \frac{l_1^2}{\lambda_{1y}^2} B_1 \quad \frac{l_1}{\lambda_{1y}} C_1 \right\| \left\| \begin{matrix} \frac{l_2}{\lambda_{2y}} C_2 \\ \frac{l_2^2}{\lambda_{2y}^2} B_2 \end{matrix} \right\|,$$

які перетворюються до вигляду:

$$D_{zk} = \frac{P_1 l^5}{2EJ_z\lambda_y^5}\left(\sin^2\frac{\lambda_y}{2}\operatorname{sh}\lambda_y - \operatorname{sh}^2\frac{\lambda_y}{2}\sin\lambda_y\right); \tag{13}$$

$$D_{zk} = \frac{P_1 l^3}{2\lambda_y^3}\left(\sin^2\frac{\lambda_y}{2}\operatorname{sh}\lambda_y + \operatorname{sh}^2\frac{\lambda_y}{2}\sin\lambda_y\right). \tag{14}$$

В результаті представимо вирази для невідомих параметрів у формі (1):

$$\begin{gathered} \varphi_z(0) = \frac{P_1 l^2}{2EJ_z\lambda_y^2}\frac{U_1}{D_1}; \qquad N_y(0) = -\frac{P_1}{2}\frac{S_1}{D_1}; \\ u_y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P_1 l^3}{4EJ_z\lambda_y^3}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda_y}{2} - \operatorname{th}\frac{\lambda_y}{2}\right); \quad M_z\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P_1 l}{4\lambda_y}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda_y}{2} + \operatorname{th}\frac{\lambda_y}{2}\right). \end{gathered} \tag{15}$$

Розв’язки (15) точно збігаються з наведеними у роботах [1, 9, 10].

Розглянемо симетричні згинально-поздовжні коливання прямокутної рами зі стійками однакової жорсткості, в центрі ригелю якої прикладено гармонічну силу $P_2 \sin\varpi t$. Необхідно визначити амплітуди лінійних та кутових переміщень вузла рами в місці стику стрижнів 1, 2. Схема рами, її логічна модель, таблиця переходів та вираз D_z для вільних коливань наведено в [8].

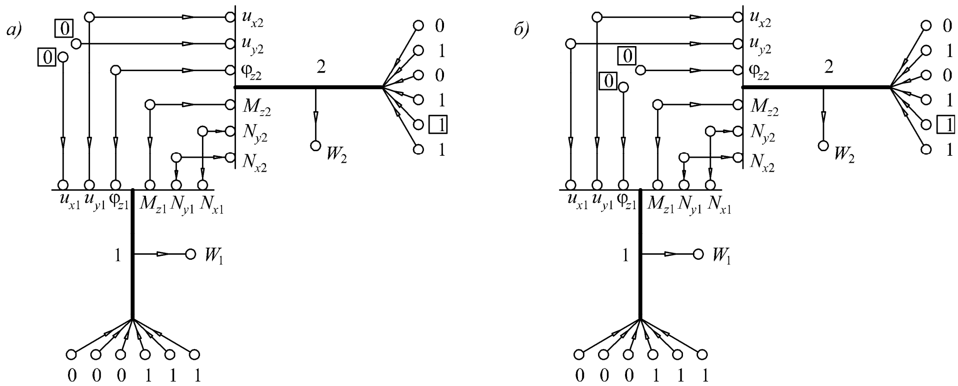

Рисунок 4 *– Логічні схеми прямокутної рами*

На рис. 4 представлено логічні схеми підавтоматів A_1, A_2, які моделюють ригель та стійки рами (стрижні 1, 2), для визначення зв’язаних параметрів $u_{x1}\left(l_1\right)$, $u_{y2}\left(0\right)$ та $\varphi_{z1}\left(l_1\right)$, $\varphi_{z2}\left(0\right)$, а в таблиці переходів (табл. 2) – булеві функції вхідних змінних та станів даної системи для виразу D_{zk}.

Таблиця 2 *– Таблиця переходів*

Пара-метри		$u_{x1}\left(l_1\right)=u_{y2}\left(0\right)$										$\varphi_{z1}\left(l_1\right)=\varphi_{z2}\left(0\right)$									
s_ν / x_ν		*ст. 1*	*ст. 2*	*1*		*2*		*3*		*4*		*ст. 1*	*ст. 2*	*1*		*2*		*3*		*4*	
				1	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*			*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*
НП	К	0 0 0	b 0 c	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 1	0 0 0	1 0 0	0 0 0	1 0 1	0 0 0	b a 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	1 1 0	0 0 0	1 0 0	0 0 0	0 1 0
	С	1 1 1	d f e	1 1 1	1 0 1	1 1 1	0 0 1	1 1 1	1 0 0	1 1 1	0 0 0	1 1 1	d e f	1 1 1	0 1 1	1 1 1	0 0 0	1 1 1	0 1 0	1 1 1	0 0 1
КП	К	0 b c	0 1 0	0 1 1	0 1 0	0 1 0	0 1 0	0 0 1	0 1 0	0 0 0	0 1 0	a b 0	0 1 0	1 1 0	0 1 0	0 0 0	0 1 0	1 0 0	0 1 0	0 1 0	0 1 0
	С	d e f	1 1 1	0 0 1	1 1 1	1 0 1	1 1 1	0 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	d e f	1 1 1	1 0 0	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 0	1 1 1	1 0 1	1 1 1

Елементи вектора-рядка W_1 та вектора-стовпця W_2 формуються у відповідності з кодами НП-КП стрижнів 1, 2, табл. 2 [4, 8]. Для параметрів $u_{x1}\left(l_1\right)$, $u_{y2}\left(0\right)$ отримаємо наступні матриці:

$$W_1=\frac{1}{\alpha_1\lambda_{x1}}\sin\lambda_{x1}\left\| \overline{E}_1 \quad \frac{l_1}{EJ_{z1}\lambda_{y1}}C_1 \quad \frac{l_1^3}{EJ_{z1}\lambda_{y1}^3}A_1 \quad \frac{l_1^4}{\left(EJ_{z1}\right)^2\lambda_{y1}^4}G_1 \right\|;$$

$$W_2=P_2W_2'\left\{\frac{1}{\alpha_2\lambda_{x2}}\sin\lambda_{x2} \quad \cos\lambda_{x2}\right\};\; W_2'=\left\|\begin{matrix}\dfrac{l_2}{\lambda_{z2}\lambda_{y2}}T_2\\ S_2\end{matrix}\right\|.$$

Після перетворень з урахуванням позначень [8], вираз для D_{zk} матиме вигляд:

$$D_{zk}=P_2\frac{\sin\lambda_{x1}\sin\lambda_{x2}}{\alpha_1\lambda_{x1}\alpha_2\lambda_{x2}}\left(\beta_2T_2K_1+\beta_1S_2K_2\right), \tag{16}$$

де $K_1=\overline{E}_1+f_z\operatorname{ctg}\lambda_{x2}A_1$; $K_2=C_1+f_z\operatorname{ctg}\lambda_{x2}G_1$.

Таким же чином вираз D_{zk} для параметрів $\varphi_{z1}\left(l_1\right)$, $\varphi_{z2}\left(0\right)$ перетворюється до вигляду:

$$D_{zk} = P_2 \frac{\sin\lambda_{x1} \sin\lambda_{x2}}{\alpha_1\lambda_{x1}\alpha_2\lambda_{x2}} \frac{\beta_1 K_2}{\beta_2 EJ_{z2}} \left(V_2 + f_1 \operatorname{ctg}\lambda_{x1} U_2\right). \tag{17}$$

В свою чергу, для D_z із [8] можна записати:

$$D_z = -\frac{\sin\lambda_{x1}\sin\lambda_{x2}}{f_1\alpha_2\lambda_{x2}}\left[\beta_2 K_1\left(B_2 - f_1 \operatorname{ctg}\lambda_{x1} C_2\right) + \beta_1 K_2\left(C_2 - f_1 \operatorname{ctg}\lambda_{x1} D_2\right)\right]. \tag{18}$$

В результаті підстановки (16)–(18) у (1) не є складним знайти амплітуди переміщень для симетричних згинально-поздовжніх коливань у площині рами.

За допомогою скінченних автоматів відкриваються широкі можливості для розробки ефективних алгоритмів розрахунку вимушених просторових коливань більш складних нерозрізних балкових конструкцій з елементами, що повторюються. Особливо це відноситься до регулярних та квазірегулярних стрижневих систем, для яких можна отримати мінімальні (скорочені) форми автоматів. Подальші дослідження, очевидно, потребують також врахування сил непружного опору.

Література

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. 560 с.
2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
3. Филин А.П. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. – Л.: Стройиздат, 1983. – 232 с.
4. Распопов А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций. Вестник Днеп нац. ун-та жел. до тр-та. Выпуск 19. – Дн-вск: ДИИТ, 86–94, 2007.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. 720 с.
6. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. – К.: Техника, 1967. 212 с.
7. Булева алгебра и конечные автоматы / Под ред. Ж. Кунцмана и П. Наслена. Перевод с французского. – М.: Мир, 1969. 296 с.
8. Распопов А.С. Изгибно-продольные колебания стержневых конструкций с распределенными параметрами // Строительство, материаловедение, машиностроение // Сб. научн. трудов. Вып. 43. – Дн-вск, ПГАСА, 2007. с. 413-421.
9. Гогенемзер К., Прагер В. Динамика сооружений. – М.: Строит. лит-ра, 1936. 358 с.
10. Ивович В.А. Переходные матрицы в динамике упругих систем: Справочник. – М.: Машиностроение, 1981. 183 с.