УДК 624.21

ОСОБЕННОСТИ ТРЕХ ЗОН ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВОЗМОЖНЫХ РЕШЕНИЙ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ МОСТОВ

Саламахин П.М.
Московский автомобильно-дорожный институт (ГТУ)

В трудах Н.С. Стрелецкого [1, 2], подводящих итоги работ в области познания закономерностей веса конструкций, отмечено, что « теория законов веса конструкций планомерно не разработана, хотя отдельные частные вопросы уже вскрыты». Это побудило предпринять попытку развития закономерностей изменения веса изгибаемых конструкций, основы которых были созданы Н.С. Стрелецким.

Так, для выполненной из материала с модулем упругости E *п*роизвольной изгибаемой конструкции, загруженной некоторым образом по длине пролета, получены закономерности изменения её веса G в функции непрерывно изменяющихся ее высот H и уровней расчетных сопротивлений R. В пространстве G-R-H эта зависимость представлена в виде некоторой поверхности, которая названа "весовой" [4]. Для представления на этой поверхности информации о прогибах конструкции использована известная фундаментальная зависимость

$$\frac{\sigma}{E} = \alpha\rho \frac{f}{L}\frac{H}{L} \tag{1}$$

между относительными прогибами $\frac{f}{L}$, относительными высотами $\frac{H}{L}$ изгибаемых конструкций и относительными деформациями $\frac{\sigma}{E}$ кромок их поясов. В зависимости (1) α и ρ – коэффициенты, учитывающие тип поперечного сечения конструкции и схему её загружения.

Из формулы (1) следует, что при фиксированной величине параметра $\alpha\rho\frac{f}{L}$ значение относительного параметра $\frac{\sigma}{E}$ для изгибаемых конструкций находится в линейной зависимости от относительного параметра $\frac{H}{L}$, а при заданных величинах пролета L, модуле упругости материала E и схеме загружения конструкции, условие постоянства относительного прогиба $\frac{f}{L}$ при проектировании конструкции различной высоты выполняется, если соблюдать условие

$$\text{R} = \text{к H}, \tag{2}$$

где $\text{к} = \dfrac{\alpha\,\rho\,E[\frac{f}{L}]}{L}$.

Используемые расчетные сопротивления материала R и применяемые высоты H в любой балочной конструкции могут иметь верхнее и нижнее значения. Так, реальные расчетные сопротивления имеющихся конструктивных материалов с некоторым модулем упругости E могут принимать значения в некоторых пределах от минимального значения R_{min}

до максимального R_{max}. Высота Н конструкции в рамках принятой конструктивной формы также может изменяться от минимального её значения H_{min} до максимального H_{max}. Будем называть ту часть весовой поверхности, которая находится в пределах

$$H_{min} \le H \le H_{max}$$

$$R_{min} \le R \le R_{max}$$

областью возможных решений изгибаемой конструкции рассматриваемой конструктивной формы.

Уравнение весовой поверхности в этой области на основе физических соображений представлено ранее [4] в следующем виде

$$G = f_{10}\,\frac{1}{H^{\alpha} R^{\beta}} + f_{20}\,\frac{H^{\chi}}{R^{\nu}} + f_{30}, \tag{3}$$

где первый член учитывает вес поясов изгибаемой конструкции, второй – вес стенок, ребер жесткости, вертикальных связей сплошных изгибаемых конструкций или вес элементов решетки и вертикальных связей сквозных изгибаемых конструкций, третий – вес горизонтальных связей, поперечных балок, элементов настила. В этом уравнении: f_{10} – некоторая функция, которая определяет влияние всех основных параметров, кроме Н и R, на вес первой группы элементов; f_{20} – аналогичная функция, определяющая вес второй группы элементов; f_{30} – функция, определяющая вес третьей группы элементов; α, β, χ, ν – положительные по физическому смыслу показатели степеней, учитывающие влияние параметров Н и R .

В сечениях этой поверхности горизонтальными плоскостями с аппликатами $G_i = \text{const}$ получаются горизонтальные кривые равного веса (изопонды), которые являются геометрическим местом точек на весовой поверхности, соответствующих возможным конструктивным решениям с одинаковыми значениями веса. Эти кривые представлены на проекциях поверхности на плоскость R ~ H (рис.1).

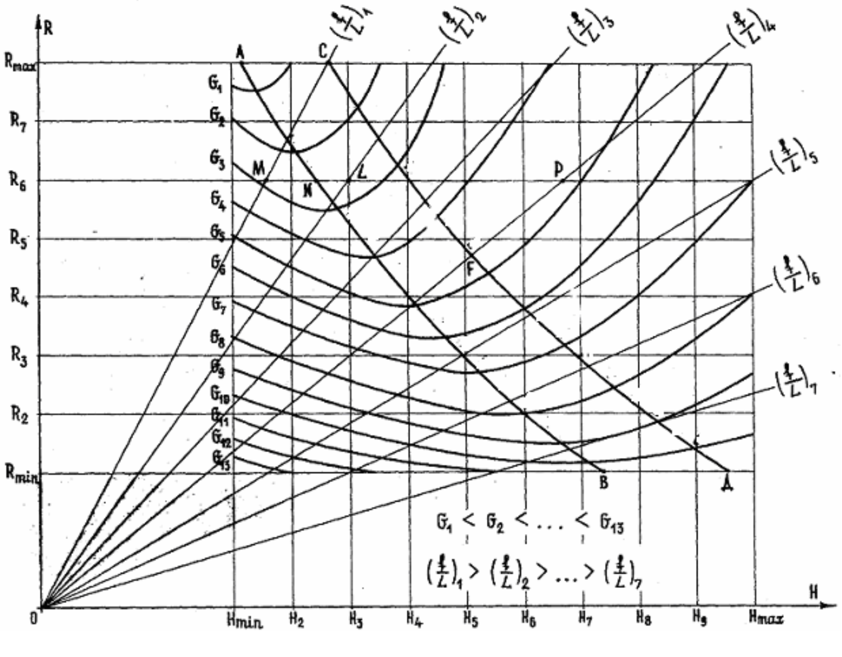

Рис. 1. Проекция весовой поверхности G=f(R,H) на плоскость R~H

При сечении весовой поверхности вертикальными плоскостями со значениями $R_i = \text{const}$ получаются вертикальные кривые (изотензы), которые являются геометрическим местом точек на весовой поверхности, соответствующих возможным конструктивным решениям изгибаемой конструкции с одинаковыми уровнями строго реализованных расчетных сопротивлений при различной высоте конструкции. На рис. 2 на плоскости G~H приведена проекция семейства изотенз с различными значениями R_i.

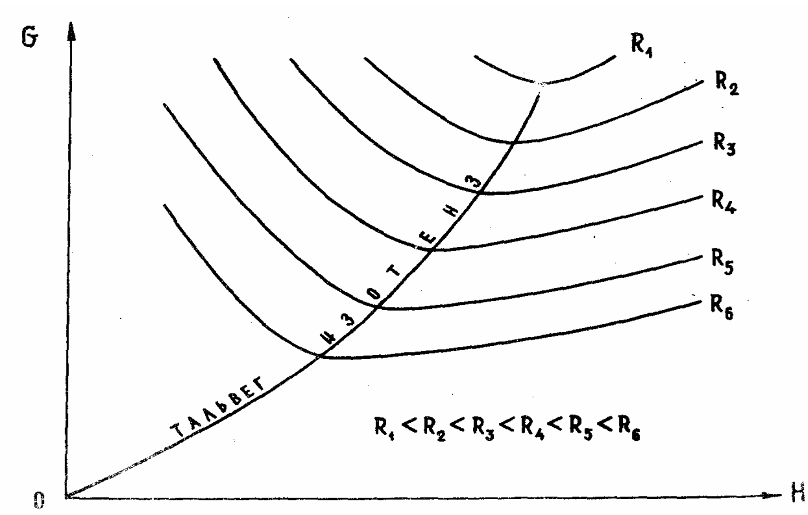

Рис. 2. Семейство изотенз

Каждая изотенза при определенном значении высоты, определяемой нижеприведенной формулой

$$H_{оптR} = \left(\frac{\alpha f_{10}}{\chi f_{20} R^{\beta-\nu}} \right)^{\frac{1}{\alpha+\chi}}, \qquad (4)$$

имеет точку с минимальным значением веса конструкции при рассматриваемом уровне расчетных сопротивлений. Линия, соединяющая минимумы изотенз, является одним из тальвегов весовой поверхности и названа *тальвегом изотенз.*

Отмечены следующие особенности семейства изотенз:

- Изотензы с более высоким уровнем расчетных сопротивлений на плоскости G~H стремятся к началу координат.
- Минимумы изотенз, характеризующихся более высоким уровнем расчетных сопротивлений, на плоскости G~H стремятся к началу координат.

При сечении весовой поверхности вертикальным пучком плоскостей, проходящих через начало координат с разными угловыми коэффициентами к=$\frac{\alpha \rho E[\frac{f}{L}]}{L}$, получено семейство изофлекс – геометрических мест точек на поверхности, соответствующих возможным конструктивным решениям изгибаемой конструкции с одинаковыми значениями относительного прогиба. На рис. 3 на плоскости G~H приведена одна из изофлекс.

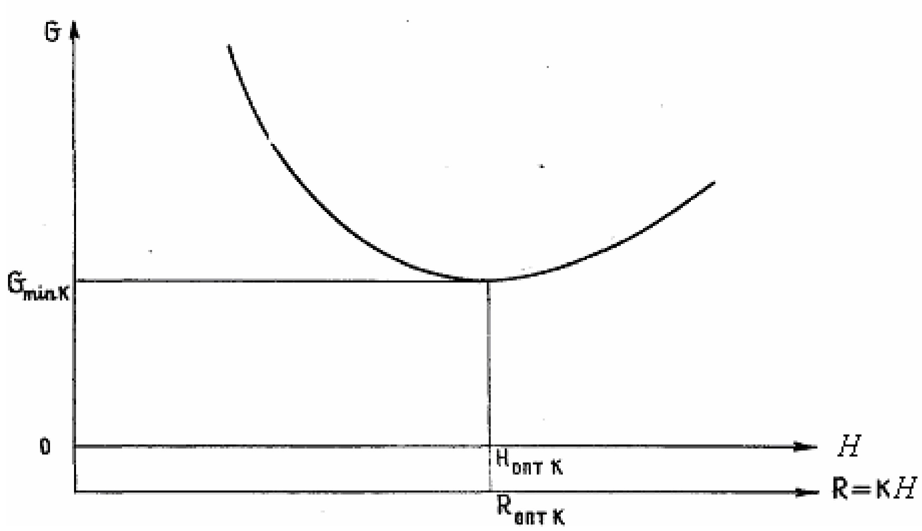

Рис. 3. Вид изофлексы

Каждой точке этого графика соответствуют варианты решения конструкции, относительные прогибы которых одинаковы, а напряжения в поясах различны и равны kH. В связи с этим на оси абсцисс этого графика кроме масштаба H нанесен еще масштаб $R = kH$. Минимальному весу конструкции $G_{\min K}$ соответствует некоторая оптимальная высота $H_{опт\ к}$ и напряжение $R = kH_{опт\ к}$ в нижнем поясе конструкции. При любой другой высоте, отличной от $H_{опт\ к}$, и другом уровне напряжений, отличном от $kH_{опт}$, вес её будет больше. Это приводит к важному выводу о том, что при проектировании конструкции по жесткости не всегда следует в ней полностью использовать расчетные сопротивления. Минимальный вес конструкции в этом случае получается при условии, если напряжение в нижнем её поясе принимает вполне определенное значение, равное $R= kH$. Это напряжение будем именовать оптимальным напряжением для конструкции с заданным относительным прогибом и обозначать $R_{опт\ к}$. Соответствующую ему высоту будем называть оптимальной высотой при проектировании по жесткости и обозначать $H_{опт\ к}$. При использовании более высоких уровней расчетных сопротивлений, чем оптимальный, вес изгибаемой конструкции и ее высота возрастают, что делает нецелесообразным применение в них более прочных материалов.

На плоскости R~H (рис. 1) семейство изофлекс проецируется в виде семейства прямых, а на плоскости G~H в виде семейства кривых. Каждая изофлекса имеет свою точку минимума при некоторой оптимальной высоте, определяемой нижеприведенной формулой

$$H_{оптК}=\left[\frac{(\alpha+\beta)f_{10}}{(\chi-\nu)f_{20}K^{\beta-\nu}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\chi-\nu}} . \quad (5)$$

Соединив точки минимумов всех изофлекс, подучим линию их тальвега. На рис. 1 приведено положение тальвега изотенз АВ и тальвега изофлекс СД. Из соотношения (4) получено уравнение линии тальвега изотенз в виде

$$R^{\beta-\nu}=\frac{\alpha f_{10}}{\chi f_{20}H^{\alpha+\chi}} , \quad (6)$$

а из соотношения (5) – уравнение тальвега изофлекс в виде

$$R^{\beta-\nu} = \frac{(\alpha+\beta) f_{10}}{(\chi-\nu) f_{20} H^{\alpha+\chi}} \; , \tag{7}$$

Так как значения α, β,χ и ν больше нуля, то всегда будет иметь место соотношение $\frac{\alpha+\beta}{\chi-\nu} > \frac{\alpha}{\chi}$, это свидетельствует о том, что для всех изгибаемых конструкций на плоскости R~H тальвег изофлекс более удален от начала координат, чем тальвег изотенз.

При анализе закономерностей, свойственных весовой поверхности, выявлено, что линии тальвегов изотенз и изофлекс разделяют область существования возможных решений на три зоны, отличающиеся условиями получения конструкций минимального веса. Отметим, что В.В. Захаров ранее в работе [3] установил соответствующие этим зонам три случая проектирования. Рассмотрим выявленные зоны.

Обозначим зоной I ту часть области, которая находится на тальвеге изотенз АВ (рис.I) и левее его. Зоной II обозначим ту часть области, которая находится между тальвегами изотенз АВ и изофлекс СД (см. рис. 1). Зоной III обозначим ту часть области, которая находится на тальвеге изофлекс СД и правее его.

При решении практических задач проектирования необходимо выбирать тот вариант конструкции, который при заданном уровне расчетных сопротивлений R = Ro имеет минимальный вес и относительный прогиб $(f/L) = [f/L]$. Эти задачи решаются по-разному, в зависимости от того, в какой зоне области возможных решений точно удовлетворяется условия:

$$R = R_0; \quad (f/L) = [f/L], \tag{8}$$

то есть от того, в какой зоне области существования находится точка пересечения изотензы $R = R_0$ с изофлексой $(f/L) = [f/L]$.

Если условия (8) удовлетворяются в зоне I области возможных решений, то конструкция минимального веса получается в том случае, если принимается вариант, находящийся на линии тальвега изотенз при $R = R_0$. Относительный прогиб этого варианта всегда меньше допускаемого или, в частном случае, равен ему.

Для иллюстрации этого выберем точку М (рис.1), лежащую в зоне I области возможных решений. Пусть в ней точно выполняются условия (8). Она лежит вне тальвега изотенз, поэтому не удовлетворяет условие минимума веса при $R = R_0 = R_6$. Искомое решение можно найти, двигаясь по области от точки М к тальвегу изотенз по изотензе, на которой находится точка М. Движение вне изотензы при $R > R_0$ невозможно из-за нарушения условия прочности, а движение при $R < R_0$ нецелесообразно, так как это приводит к увеличению веса конструкции. Целесообразным остается только движение по изотензе к её тальвегу, где находится искомая для этого случая точка N, содержащая оптимальное по условию минимума веса решение. При этом движении пересекаются изофлексы с $(f/L) < (f/L)_1$, что свидетельствует об уменьшении относительных прогибов конструкции, т.е. об избыточном удовлетворении условия жесткости конструкции.

Таким образом, относительный прогиб оптимального варианта в зоне I меньше $[f/L]$ или равен ему при нахождении точки M на линии тальвега изотенз. Эта особенность зоны I свидетельствует о том, что размеры конструкции в ней определяются только условием прочности. Об удовлетворении условия жесткости в этой зоне можно не заботиться, оно выполняется всегда с избытком.

Если условия (8) удовлетворяются в зоне II области существования возможных решений, то конструкция минимального веса получается в том случае, если принимается вариант, соответствующий строгому удовлетворению этих условий. Для иллюстрации этого выберем точку L, лежащую в зоне II (рис. I). Пусть в ней строго выполняются условия (8). Эта точка не удовлетворяет условие минимума веса при $R = R_0$, так как лежит вне тальвегов изотенз и изофлекс. Двигаться от неё к тальвегу изотенз нельзя, так как это приведет к нарушению условия $(f/L) \leq [f/L]$, двигаться от неё к тальвегу изофлекс также нельзя, т.к. это приведет к условию $R > R_0$, что недопустимо. Движение от точки L по изотензе к тальвегу изофлекс возможно, но нецелесообразно, так как это приведет к увеличению веса и высоты конструкции. Следовательно, единственно возможным решением в этом случае является принятие того конструктивного решения, которое соответствует точке L. Это решение является компромиссным. Оно не является идеальным для удовлетворения условий прочности или условий жесткости. Тем не менее, в этом решении полностью используется заданное расчетное сопротивление, а относительный прогиб равен допускаемому.

Отмеченная особенность зоны II области свидетельствует о том, что в ней определяющими размеры конструкции являются условия прочности и жесткости. Пренебрежение каким-либо из этих условий приводит либо к снижению надежности конструкции, либо к увеличению ее веса.

Если условия (8) удовлетворяются в зоне III области существования возможных решений, то конструкция минимального веса получается в том случае, если принимается вариант, находящийся на тальвеге изофлекс с $(f/L) = [f/L]$. Уровень расчетных сопротивлений, необходимый для этого варианта, всегда будет меньше заданного $R \leq R_0$ или, в частном случае, равен ему.

Для иллюстрации этого выберем точку P (рис.1), лежащую в зоне III области возможных решений. Пусть в ней строго удовлетворяются условия (8). Она не отвечает условию минимума веса, так как лежит вне тальвегов изотенз и изофлекс. Для получения варианта конструкции, удовлетворяющего условие минимума веса необходимо от точки P двигаться в сторону тальвегов. Движение по изотензе к точке N обеспечивает самое интенсивное снижение веса, но оно невозможно ввиду того, что при этом нарушится условие $(f/L) \leq [f/L]$. Единственно возможным направлением поиска оптимального решения в этом случае является движение по изофлексе к минимальной ее точке F , т.е. к тальвегу изофлекс. При этом движении пересекаются изотензы с $R<R_0$, что свидетельствует об уменьшении необходимого уровня расчетных сопротивлений, т.е. об избыточном удовлетворении условий прочности. Таким образом, оптимальный уровень расчетных сопротивлений в зоне III всегда меньше заданного уровня расчетных сопротивлений. В частном случае при нахождении точки P на тальвеге изофлекс он будет равен заданному.

Эта особенность зоны III свидетельствует о том, что основным условием, определяющим размеры конструкции в ней, является условие жесткости. Об условии прочности в этой зоне можно не заботиться, оно удовлетворяется всегда с избытком. Получение конструкции наименьшего веса обеспечивается при снижении уровня расчетных сопротивлений до оптимального уровня $R = R_{опт\ к.}$

Из вышеизложенного следует, что поиск оптимального решения конструкции необходимо начинать с установления той зоны области возможных решений, в которой по заданным исходным данным его следует искать. Для этого воспользуемся выявленными выше закономерностями и характерными особенностями этих зон. Выше было отмечено, что характерными особенностями зон являются:

для зоны I

$$(f/L)_{опт} \le [f/L], \tag{9}$$

для зоны II

$$(f/L)_{опт} > [f/L]; \; R_{опт} > R_0, \tag{10}$$

для зоны III

$$R_{опт} < R_0. \tag{11}$$

Для нахождения положения оптимального решения конструкции в области существования в общем случае необходимо определить две величины: $(f/L)_{опт}$ и $R_{опт}$ сопоставить их с допускаемым значением $[f/L]$ и заданным уровнем расчетных сопротивлений R_0. При этом по условиям (9), (10) и (11) устанавливается номер зоны.

В общем случае этот поиск следует производить по-разному, в зависимости от того, известны ли значения α, β, χ и ν и явные зависимости f_{10} и f_{20} в формуле (3) для веса конструкции. Если они известны, то по формулам (4) и (5) можно определить значения оптимальных высот $H_{оптR}$ $H_{опт\,к}$.

Значения $(f/L)_{опт}$ и $R_{опт}$ после этого могут быть определены по формулам:

$$(f/L)_{опт} = \frac{R_0 L}{\alpha \rho E \, H_{оптR}}, \tag{12}$$

$$R_{опт\,к} = \kappa H_{опт\,к}. \tag{13}$$

По известным значениям $(f/L)_{опт}$ и $R_{опт\,к}$ далее по условиям (9), (10) и (11) устанавливается номер зоны, а затем на основе изложенных выше закономерностей находится оптимальное решение конструкции. Если искомое решение находится в зоне I, то оно расположено в точке минимума изотензы $R = R_0$. Если искомое решение находится в зоне II, то оно расположено в точке пересечения изотензы $R = R_0$ с изофлексой $(f/L) = [f/L]$. Если искомое решение находится в зоне III, то оптимальный вариант расположен в точке минимума изофлексы.

Если конкретный вид функции (3) неизвестен, то при выборе оптимального решения среди всех решений, находящихся во всей области их существования, целесообразно воспользоваться излагаемым ниже методом двух сечений.

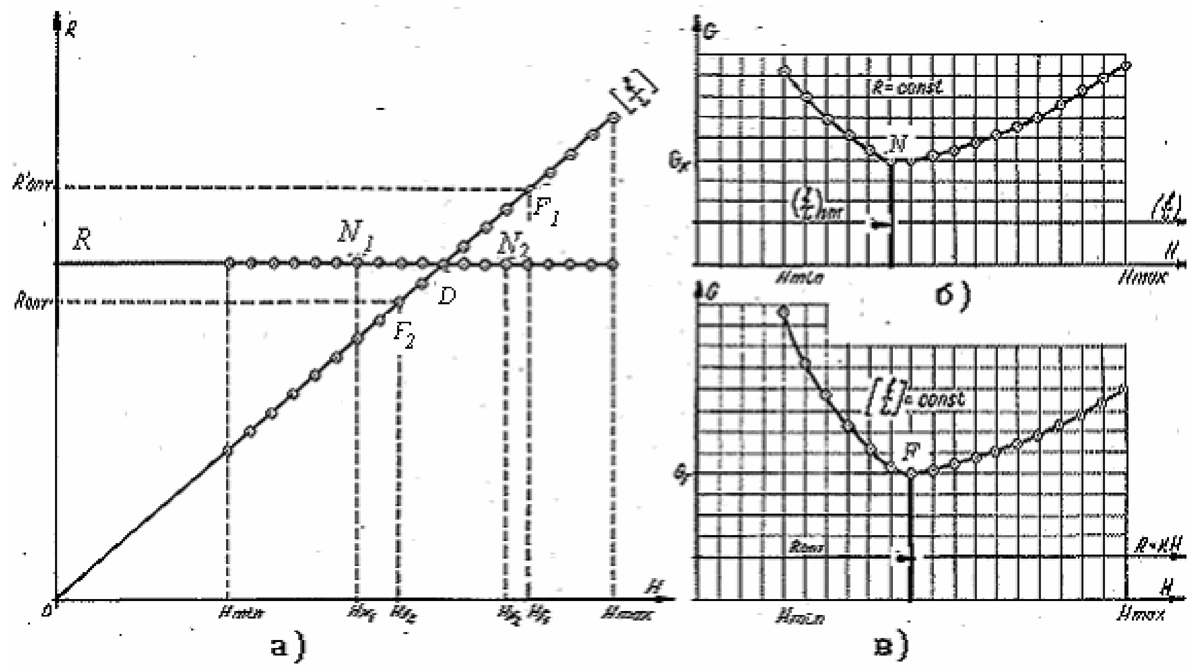

Рис. 4. К методу направленного поиска H и R

В соответствии с этим методом (см. рис. 4,а) при автоматизированном проектировании конструкции область возможных решений вначале следует рассечь плоскостью $R = R_{max}$ и получить изотензу с $R = R_{max}$. Точке N (см. рис. 4,б) минимума изотензы при этом будет соответствовать некоторый относительный прогиб $(f/L)_{опт}$

Далее необходимо сопоставить $(f/L)_{опт}$ с $[f/L]$. При этом может быть два случая:

Случай 1. $(f/L)_{опт} \le [f/L]$. В этом случае точка N (см. рис.4, б) изотензы на ее проекции на плоскость R~H будет находиться в положении N_2 (см. рис. 4, а), т.е. правее точки D пересечения изотензы с изофлексой. Дальнейший поиск в этом случае следует прекратить. Оптимальный вариант решения конструкции в этом случае уже найден: он находится в первой зоне области существования в точке N_2 минимума изотензы.

Случай 2. $(f/L)_{опт} > [f/L]$. В этом случае точка N изотензы на её проекции на плоскость R~H будет находиться в положении N_1, т.е. левее точки D пересечения изотензы с изофлексой. В этом случае поиск следует продолжить с тем, чтобы установить, в какой – второй или третьей – зоне области существования находится оптимальное решение. Для этого область существования следует при автоматизации проектирования рассечь дополнительно плоскостью $(f/L) = [f/L]$ и получить изофлексу с $(f/L) = [f/L]$.

Точке F (рис.4, в) минимума изофлексы будет соответствовать некоторый оптимальный уровень расчетных сопротивлении $R_{опт\ к}$. Если $R_{опт\ к} < R_0$ (при этом точка F изофлексы на ее проекции на плоскость R~H будет находиться в положении F_2 (см. рис. 4, а)) , то оптимальный вариант соответствует в точке F_2 минимума изофлексы, т.е. зоне III области существования возможных решений.

Если $R_{опт\ к} > R_0$, то оптимальный вариант находится в точка D (рис. 4, а) пересечения изотензы и изофлексы. В этом случае он находится в зоне II области существования возможных конструктивных решений.

Литература

1. Стрелецкий Н.С., Стрелецкий Д.Н. Проектирование и изготовление экономичных металлических конструкций. М., 1964.
2. Стрелецкий Н.С. Законы изменения веса металлических мостов, Транспечать, 1926.
3. Захаров В.В. Теоретические предпосылки к установлению системы высотных типоразмеров пролетных строений мостов. // Вопросы типизации мостовых конструкций, М.,1963.
4. Саламахин П.М. Метод обобщения закономерностей веса несущих конструкций. М., 1977.