

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ НЕСНОЇ СПРОМОЖНОСТІ ЗГИННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКУ

Валовой О.І.

Єрмоєнко О.Ю.

Криворізький технічний університет

Розрахункові моделі та гіпотези, що взято за основу норм проектування бетонних та залізобетонних конструкцій, вдосконалюються одночасно з накопиченням відомостей про особливості роботи останніх. Спочатку норми використовували лінійну модель, яка ґрунтувалась на застосуванні закону Гука. В тридцяті роки минулого століття О.О. Гвоздев впровадив в нормативні методи нову модель для розрахунку несної спроможності, в якій було взято за основу поняття пластичного шарніру. Модель пластичного шарніру дозволила в наступні роки суттєво розвинути теорію розрахунку залізобетону і отримати ряд важливих результатів.

Одночасно за ці роки йшло накопичення експериментальних відомостей про роботу залізобетону в конструкціях, що дозволило розробникам Евростандартів обґрунтувати впровадження в норми “деформаційної моделі перерізу” залізобетонного елемента.

“Деформаційна модель перерізу” розрахунку залізобетонних елементів європейських стандартів ґрунтується на чотирьох гіпотезах[1, 3].

Відповідно до першої з них деформації бетону і арматури в площині і з площини згину визначають з використанням гіпотези плоских перерізів.

Друга гіпотеза передбачає, що для випадку неоднорідного напруженого стану при згині відомі залежності “напруження-деформації” для бетону і арматури, які дозволяють за відомими відносними деформаціями розрахувати напруження бетону і арматури в різних точках перерізу.

Третя гіпотеза дозволяє згадувані діаграми “напруження-деформації” при неоднорідному напруженому стані (внаслідок згину) отримувати з дослідів по однорідному напруженому стану простого стискання або розтягання. Для бетону використовують криволінійну діаграму з низхідною віткою.

Згідно четвертої гіпотези вважають, що нейтральні осі напружень і деформацій збігаються при тривалому навантаженні.

Гіпотези моделей Евростандартів дозволяють досліджувати напружено-деформований стан згинаних залізобетонних балок на всіх етапах навантаження, а також фіксувати моменти їх руйнування. На відміну від моделі пластичного шарніру методу граничної рівноваги в рамках гіпотези Евростандартів потрібно враховувати черговість досягнення різними сталями і бетоном стану текучості.

При цьому потрібно розглядати чотири послідовні варіанти напружено-деформованого стану перерізу, що виникають зі зростанням згинального моменту[2]:

1. Бетон та арматура працюють в пружній стадії; бетон на розтягання не працює.
2. Бетон працює в пружній стадії; в стиснутій зоні арматура тече; розтягнута арматура працює в пружній стадії.
3. В стиснутій зоні арматура тече; бетон працює в пружнопластичній стадії; розтягнута арматура працює в пружній стадії.

4. Бетон перебуває в пружнопластичній стадії; стиснута та розтягнута арматура знаходиться в пружній стадії.

Розв'язання задачі в такій постановці виявляється досить трудомістким. В той же час було запропоновано спрощену модель розрахунку деформування залізобетонної балки [2], для якої рівняння нелінійного деформування бетону (1) можна розкласти в ряд, обмежуючись п'ятьма членами ряду (2), що суттєво спрощує розв'язання задачі.

$$\sigma_x = \frac{\alpha \cdot \varepsilon_x + \beta \cdot \varepsilon_x^2}{\varepsilon_{b0} + \beta \cdot \varepsilon_x}, \quad (1)$$

де $\alpha = E_b \cdot \varepsilon_{b0}$; $\beta = -\frac{E_b}{\varepsilon_{b0}^2}$; $\gamma = 1$; $\delta = \left(\frac{E_b}{E_s} - \frac{\gamma}{\varepsilon_{b0}^2}\right) \varepsilon_{b0}^2 \gamma$;

$\varepsilon_{b0} = \varepsilon_{ct} = 0.002$ – відносна деформація, що відповідає напруженню R_{bt} ;

σ_x, ε_x – напруження та деформації в довільній точці поперечного перерізу на відстані X від центру тяжіння.

$$\sigma_x = A \cdot \varepsilon_x + B \cdot \varepsilon_x^2 + C \cdot \varepsilon_x^3 + D \cdot \varepsilon_x^4 + F \cdot \varepsilon_x^5. \quad (2)$$

Коефіцієнти A, B, C, D, F отримують не експериментальним шляхом, а таким, що відповідає параметрам діаграми Євростандартів. Розрахункові схеми поздовжніх напружень і деформацій в поперечному перерізі залізобетонної балки, навантаженої в середині прольоту зосередженим навантаженням, наведено на рис. 1.

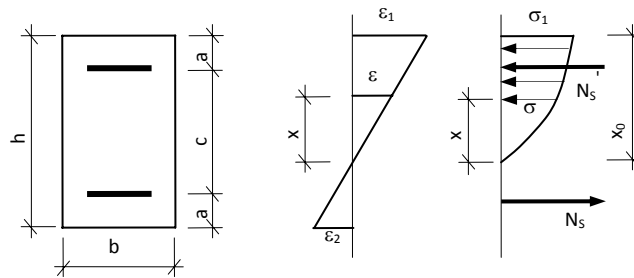


Рис. 1. Розрахункова схема залізобетонної балки

Рівняння рівноваги частини балки, яка відділена середнім перерізом, мають вигляд

$$F_{\text{int}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = b \int_A \sigma \cdot dF = 0;$$

$$M_{\text{int}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = b \int_A \sigma \cdot x \cdot dF = M(\varepsilon),$$

де $M(\varepsilon) = \frac{F \cdot l}{4}$ – головний момент відносно центру тяжіння стиснутої арматури і головний вектор епюри нормальних напружень.

Для стадії, коли арматура працює в пружній стадії, для апроксимації діаграми $\sigma - \varepsilon$ використовують поліном п'ятого ступеня (2). Враховуючи гіпотезу плоских перерізів, головний вектор і головний момент записують у вигляді

$$\begin{aligned}
F_{s_{2H}}(s_1, s_2) = 0 &= \frac{b \cdot h}{s_1 - s_2} \cdot \left(\frac{A}{2} \cdot s_1^2 + \frac{B}{3} \cdot s_1^3 + \frac{C}{4} \cdot s_1^4 + \frac{D}{5} \cdot s_1^5 + \frac{F}{2} \cdot s_1^6 \right) + \\
&+ \frac{a}{h} \cdot E_s \cdot A_s \cdot s_1 + \left(1 - \frac{a}{h} \right) \cdot E_s' \cdot A_s' \cdot s_1 + \frac{a'}{h} \cdot E_s' \cdot A_s' \cdot s_2 + \left(1 - \frac{a'}{h} \right) \cdot E_s \cdot A_s \cdot s_2; \\
M_{s_{2H}}(s_1, s_2) &= \frac{b \cdot h^2 \cdot s_1}{(s_1 - s_2)^2} \cdot \left(\frac{A}{2} \cdot s_1^2 + \frac{B}{3} \cdot s_1^3 + \frac{C}{4} \cdot s_1^4 + \frac{D}{5} \cdot s_1^5 + \frac{F}{2} \cdot s_1^6 \right) - \\
&- \frac{b \cdot h^3}{(s_1 - s_2)^3} \cdot \left(\frac{A}{3} \cdot s_1^3 + \frac{B}{4} \cdot s_1^4 + \frac{C}{5} \cdot s_1^5 + \frac{D}{6} \cdot s_1^6 + \frac{F}{7} \cdot s_1^7 \right) - \\
&- \frac{a' \cdot b \cdot h}{s_1 - s_2} \cdot \left(\frac{A}{2} \cdot s_1^2 + \frac{B}{3} \cdot s_1^3 + \frac{C}{4} \cdot s_1^4 + \frac{D}{5} \cdot s_1^5 + \frac{F}{6} \cdot s_1^6 \right) + \\
&+ \frac{a \cdot c}{h} \cdot E_s \cdot A_s \cdot s_1 + \left(1 - \frac{a}{h} \right) \cdot c \cdot E_s \cdot A_s \cdot s_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Подальші розрахунки проводять у припущенні, що закон зміни зовнішнього навантаження відомий.

Для дослідження процесу зміни напружено-деформованого стану балки на всіх етапах навантаження диференціюють систему рівнянь (3), а саме:

$$\begin{aligned}
\frac{dF_{s_{2H}}}{ds_1} \cdot s_1 + \frac{dF_{s_{2H}}}{ds_2} \cdot s_2 &= 0, \\
\frac{dM_{s_{2H}}}{ds_1} \cdot s_1 + \frac{dM_{s_{2H}}}{ds_2} \cdot s_2 &= M(t),
\end{aligned} \tag{4}$$

Отримані залежності дозволяють спостерігати зміни напружено-деформованого стану залізобетонної балки від моменту навантаження до моменту вичерпання несної спроможності. Задачу зведено до інтегрування системи двох лінійних диференціальних рівнянь

$$m_{11} \cdot s_1' + m_{12} \cdot s_2' = 0;$$

$$m_{21} \cdot s_1' + m_{22} \cdot s_2' = \Phi(t), \tag{5}$$

$$\text{де } m_{11} = \frac{dF_{s_{2H}}}{ds_1}; \quad m_{21} = \frac{dM_{s_{2H}}}{ds_1}; \quad m_{22} = \frac{dM_{s_{2H}}}{ds_2}; \quad \Phi(t) = M(t).$$

Остаточно отримаємо

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{-m_{12} \cdot \Phi(t)}{m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}}; \\
s_2 &= \frac{-m_{21} \cdot \Phi(t)}{m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Інтегруючи систему диференціальних рівнянь, отримаємо величини, що характеризують напружено-деформований стан балки, під дією зовнішнього зосередженого навантаження $F(t)$.

Викладена методика дозволяє знайти аналітичні вирази для екстремального критерія вичерпання міцності перерізу залізобетонного елемента. Цей критерій відповідає максимальному значенню моменту

$$\frac{dM}{d\chi} = 0, \quad (7)$$

де χ – кривизна зігнутої вісі балки.

Оскільки згинальний момент є функцією двох змінних $M = M_{\text{BH}}(s_1, s_2)$, то його досліджують на умовний екстремум. В якості додаткового рівняння зв'язку використовують перше рівняння рівноваги $F_{\text{BH}}(s_1, s_2) = 0$.

Склавши функцію Лагранжа, записавши умови екстремуму, отримують

$$\frac{dM_{\text{BH}}}{ds_1} + \lambda \cdot \frac{dF_{\text{BH}}}{ds_2} = 0;$$

$$\frac{dM_{\text{BH}}}{ds_2} + \lambda \cdot \frac{dF_{\text{BH}}}{ds_1} = 0.$$

Виключаючи невизначений множник λ , отримують рівняння, яке пов'язує змінні в момент вичерпання міцності

$$\frac{dM_{\text{BH}}}{ds_2} - \frac{\frac{dM_{\text{BH}}}{ds_2}}{\frac{dF_{\text{BH}}}{ds_1}} \cdot \frac{dF_{\text{BH}}}{ds_2} = 0. \quad (8)$$

Порівнявши (4) та (8), можна дійти висновку, що критерії вичерпання міцності (8) тотожні умові спільності системи диференціальних рівнянь (4), умові існування розв'язків $s_1 = s_1(t)$ та $s_2 = s_2(t)$.

Метою поставлених досліджень було з'ясування справедливості отриманих залежностей шляхом порівняння їх з експериментальними відомостями про напружено-деформований стан залізобетонних балок, навантажених в середині прольоту зосередженою силою.

З огляду на означену мету було проаналізовано експериментальні дані отримані дослідниками [2...5]. Експериментальні дані були узагальнені та була проведена їх обробка з урахуванням раніше згадуваних залежностей.

Для зручності подальшого аналізу отримані результати представлено в графічному вигляді [2]. На рис. 3 приведено залежності «згинальний момент-кривизна» для різних діаграм деформування бетону (рис. 2):

- 1 – пружна модель;
- 2 – діаграма Прандтля з необмеженою текучістю;
- 3 – поліном, що не має обмежень з граничних деформацій;
- 4 – діаграма Прандтля з обмеженою площадкою деформацій $\varepsilon_{\text{пр}}$ текучості;
- 5 – поліном, обмежений граничною деформацією $\varepsilon_{\text{пр}}$ (Євростандарти).

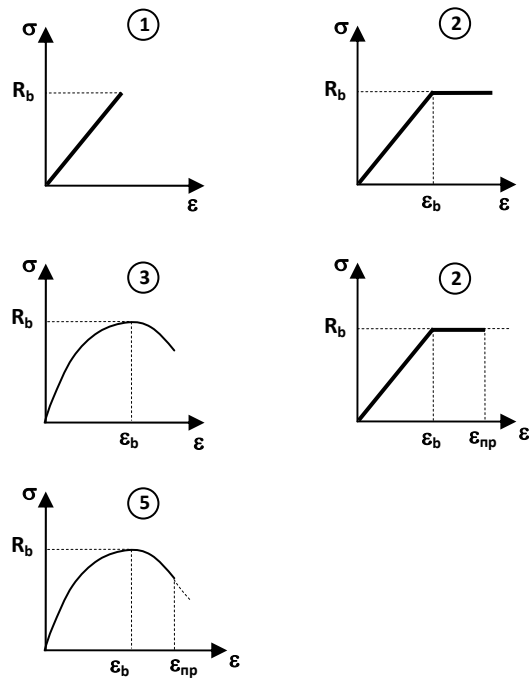


Рис. 2. Діаграма $\sigma - \varepsilon$ деформування бетону

Крива 1 відповідає пружній стадії роботи бетону (бетон працює на розтягання). Крива 2 на цьому малюнку відповідає діаграмі Прандтля з необмеженою площадкою текучості. Тут момент

$$M = M_2 \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\delta \cdot b}{\varepsilon} \right)^2 \right],$$

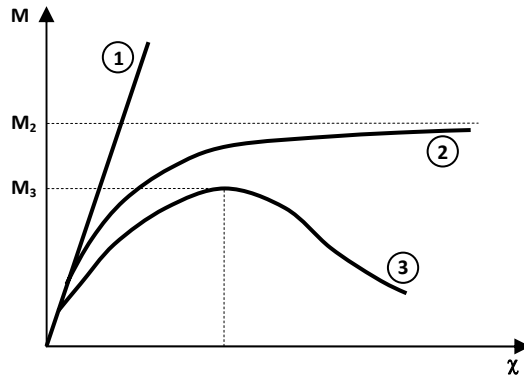
де M_2 – граничний момент, який відповідає шарніру пластичності (бетон працює на розтягання, арматура відсутня);

ε – подовження крайньої фібри перерізу;

$$\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{h} = \frac{2\delta}{h} = \chi; \quad \delta = \frac{\chi R}{2} \right) - \text{подовження при фібровій текучості.}$$

Таким чином, згинальний момент M в межах пружно-пластичної зони роботи перерізу представляє собою гіперболічну функцію подовження крайньої фібри ε , маючи своєю асимптотою момент M_2 . Звідси можна дійти висновку, що величині M_2 відповідає нескінченно велике подовження крайньої фібри (або кривизни), і при цьому граничний момент та шарнір пластичності повністю проявитися не можуть. Однак на протязі площадки текучості пластичність може проявитися в достатній мірі.

Крива 3 на рис. 3 відповідає діаграмі бетону у вигляді полінома (бетон працює на розтягання, арматура відсутня). Точка M_3 цієї кривої відповідає рівнянню (8); після цієї точки система рівнянь рівноваги стає несумісною.



1 – пружна модель; 2 – діаграма Прандтля; 3 – поліном

Рис. 3. Діаграми “момент-кривизна”

Якщо діаграма $\sigma - \varepsilon$ бетону обмежена деформацією $\varepsilon_{пр}$ (4, 5 на рис. 2), то криві 4, 5 на діаграмі $M - \chi$ обриваються в точках M_4 та M_5 на рис. 4.

Якщо бетон працює на розтягання, а арматура присутня як в розтягнутій, так і в стиснутій зонах перерізу, то вигляд кривих на діаграмі $M - \chi$ видозмінюються.

Якщо в деякий момент часу арматура в стиснутій зоні втратить несну спроможність (точка А рис.5). Крива 3''' ($M - \chi$) в точці А' має точку перелому (рис. 5). Зусилля в стиснутій зоні сприймається бетоном, і за рахунок цього крива 3''' досягає екстремуму. Однак, якщо в деякій точці, що лежить перед точкою А_В бетон стиснутої зони руйнується, то крива 3''' має в точці А_В екстремум. Останній спостерігається і в випадку руйнування розтягнутої арматури.

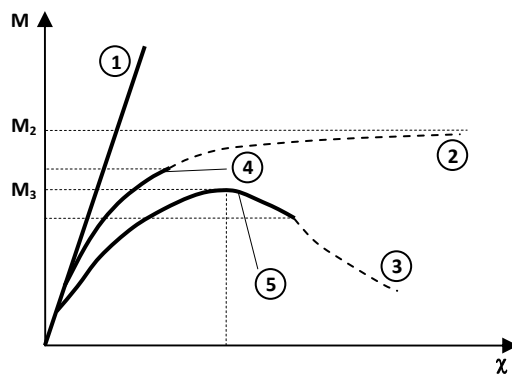


Рис. 4. Діаграми “момент – кривизна” для бетонів з обмеженою площиною текучості

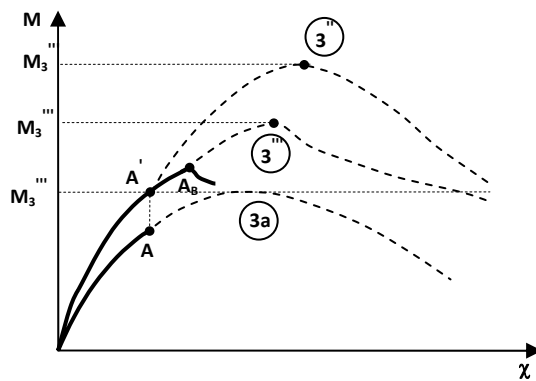


Рис. 5. Діаграма “момент-кривизна” з урахуванням руйнування стиснутої зони

Висновки

Проведений аналіз вказує на те, що для оцінювання моменту руйнування залізобетонного елемента потрібно одночасно відстежувати три критерія вичерпання міцності перерізу:

1 – екстремальний $\frac{dM}{d\lambda} = 0$;

2 – міцність стиснутої зони бетону;

3 – міцність розтягнутої арматури.

Слід відмітити, що аналітична методика побудови залежності “момент-кривизна” доволі проста в чисельній реалізації та дозволяє уникнути застосування відомих емпіричних залежностей.

Література

1. Санжаровский Р.С., Веселов А.А. Теория расчёта строительных конструкций на устойчивость и современные нормы. Издательство АСВ, Санкт-Петербург, Москва, 2002. – 128 с.
2. Беглов А.Д., Санжаровский Р.С. Теория расчёта железобетонных конструкций на прочность и устойчивость. Современные нормы и Евростандарты. Санкт-Петерб. гос. архит.-строит. ун-т-М.: АСВ, 2006.
3. Беглов А.Д., Санжаровский Р.С., Бондаренко В.М. Евростандарты и нелинейная теория железобетона. – Бетон и железобетон – пути развития. II Всероссийская (Международная) конференция по бетону и железобетону. Том 1. Пленарные доклады. М.,2005. – С. 119-125.
4. Беккиев М.Ю., Манилян Л.Р. Расчёт изгибаемых элементов различной формы поперечного сечения с учётом нисходящей ветви деформирования. Нальчик, 1985. – 132 с.
5. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н. Диаграммы деформирования бетона, их трансформация в зависимости от различных факторов и использование в расчётах конструкций. – Предельные состояния бетонных и железобетонных конструкций гидротехнических сооружений. Энергоатомиздат, 1986. – С.170-180.