7. *Ложкин В. Н.* Определение упругих и пластических перемещений в изгибаемой изотропной полосе с круговым отверстием // Там само. – 1997. – № 9. – С. 73–77.
8. *Ложкин В. Н.* Упругопластическое равновесие изотропной плоскости с круговым отверстием при неравномерном внешнем нагружении // Там само. – 1998. – № 1. – С. 87–91.
9. *Ложкин В. Н.* Развитие пластической области в изотропной полосе с круговым отверстием при линейном внешнем нагружении // Там само. – 2001. – № 1. – С. 60–64.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 06.04.2007

УДК 539.3

В. А. Меньшиков

Задача механики разрушения для биматериала с круговой межфазной трещиной под воздействием волны растяжения — сжатия

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

The paper is devoted to the solution of a fracture mechanics problem for a penny-shaped crack located in the interface of two dissimilar media under the action of a tension-compression wave propagating normally to the interface. The stress intensity factors (the opening mode and the transverse shear mode) are obtained in terms of the strain and displacements fields, which are numerically calculated for the vicinity of the crack front.

Численное решение задачи теории упругости для составного тела с круговой межфазной трещиной под действием гармонической нагрузки получено в [1]. В настоящей работе рассчитаны коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва и поперечного сдвига в биматериальном теле с круговой трещиной в плоскости раздела упругих сред, находящегося под воздействием волны растяжения — сжатия, которая падает перпендикулярно к плоскости раздела материалов. Коэффициенты получены на основе численного определения полей напряжений и перемещений вблизи фронта трещины.

Постановка задачи. В трехмерном пространстве рассматривается бесконечное тело, состоящее из двух упругих сред, соединенных вдоль общей поверхности Γ^*, которая является плоскостью. Каждое из полупространств однородно, изотропно и характеризуется разными упругими постоянными и плотностями. В теле между полупространствами имеется круговая трещина с границами-берегами Γ^1, Γ^2, характеризующаяся тем, что поверхности берегов принадлежат разным средам, а ее фронт находится на плоскости Γ^*. В составном теле с трещиной распространяется волна растяжения — сжатия в направлении, перпендикулярном к межфазной плоскости. На поверхности Γ^* полагается полное сцепление материалов, т. е. непрерывность перемещений и напряжений. Фронт трещины неподвижен, ее берега перемещаются без взаимного контакта.

Пусть напряженно-деформированное состояние биматериального тела с тещиной описывается уравнениями линейной динамической теории упругости. Тогда, с учетом принципа суперпозиции, задача сводится к анализу состояния тела с межфазной трещиной, к берегам которой приложена компенсирующая нагрузка, непрерывностью перемещений и напряжений на общей поверхности раздела сред.

Итак, на поверхностях трещины задаются усилия

$$\overline{p}^1(\overline{x},t)=\overline{g}^1(\overline{x},t),\qquad \overline{x}\in\Gamma^1,\qquad \overline{p}^2(\overline{x},t)=\overline{g}^2(\overline{x},t),\qquad \overline{x}\in\Gamma^2,\qquad t\in\mathrm{T};$$

на границе сцепления полагаются условия плотного механического контакта

$$\overline{u}^1(\overline{x},t)=\overline{u}^2(\overline{x},t),\qquad \overline{p}^1(\overline{x},t)=-\overline{p}^2(\overline{x},t),\qquad \overline{x}\in\Gamma^*,\qquad t\in\mathrm{T},$$

где $\overline{p}(\overline{x},t)=\{p_1,p_2,p_3\}^T$, $\overline{u}(\overline{x},t)=\{u_1,u_2,u_3\}^T$ — векторы поверхностных сил и перемещений.

На бесконечности потребуем выполнение условий, которые обеспечивают конечность энергии упругого тела, занимающего неограниченную область.

Гармонический во времени характер нагружения дает возможность представить параметры задачи в виде

$$\overline{p}(\overline{x},t)=\mathrm{Re}\{\overline{p}(\overline{x})\exp(-i\omega t)\},\qquad \overline{u}(\overline{x},t)=\mathrm{Re}\{\overline{u}(\overline{x})\exp(-i\omega t).$$

Здесь $\overline{u}(\overline{x})$ и $\overline{p}(\overline{x})$ — комплексные амплитуды перемещений и поверхностных сил, соответственно; $\omega=2\pi/T$ — круговая частота.

Для численного решения рассматриваемой задачи используется метод граничных элементов, при реализации которого строятся интегральные уравнения на границе составного тела с трещиной на основе соотношений Сомильяны.

Система граничных интегральных уравнений относительно комплексных амплитуд перемещений и усилий имеет следующий вид [2]:

$$\frac{1}{2}g_j^1(\overline{y})-\int\limits_{\Gamma^1}g_i^1(\overline{x})K_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x}=-\int\limits_{\Gamma^1}u_i^1(\overline{x})F_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x}-\int\limits_{\Gamma^*}p_i^*(\overline{x})K_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x}+$$
$$+\int\limits_{\Gamma^*}u_i^*(\overline{x})F_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x},\qquad \overline{y}\in\Gamma^1,$$

$$\frac{1}{2}g_j^2(\overline{y})-\int\limits_{\Gamma^2}g_i^2(\overline{x})K_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x}=-\int\limits_{\Gamma 2}u_i^2(\overline{x})F_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x}+\int\limits_{\Gamma^*}p_i^*(\overline{x})K_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x}-$$
$$-\int\limits_{\Gamma^*}u_i^*(\overline{x})F_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x},\qquad \overline{y}\in\Gamma^2,$$

$$\int\limits_{\Gamma^1}g_i^1(\overline{x})K_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x}-\int\limits_{\Gamma^2}g_i^2(\overline{x})K_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x}=\int\limits_{\Gamma^1}u_i^1(\overline{x})F_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x}-$$
$$-\int\limits_{\Gamma^2}u_i^2(\overline{x})F_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x}+\int\limits_{\Gamma^*}p_i^*(\overline{x})(K_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega)+K_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega))\,d\overline{x}-$$
$$-\int\limits_{\Gamma^*}u_i^*(\overline{x})(F_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega)+F_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega))d\overline{x},\qquad \overline{y}\in\Gamma^*,$$

$$\int\limits_{\Gamma^1} g_i^1(\overline{x})U_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x} - \int\limits_{\Gamma^2} g_i^2(\overline{x})U_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x} = \int\limits_{\Gamma^1} u_i^1(\overline{x})W_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x} -$$

$$- \int\limits_{\Gamma^2} u_i^2(\overline{x})W_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega)\,d\overline{x} + \int\limits_{\Gamma^*} p_i^*(\overline{x})(U_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega) + U_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega))\,d\overline{x} -$$

$$- \int\limits_{\Gamma^*} u_i^*(\overline{x})(W_{ij}^1(\overline{x},\overline{y},\omega) + W_{ij}^2(\overline{x},\overline{y},\omega))d\overline{x}, \qquad \overline{y} \in \Gamma^*,$$

где $U_{ij}(\overline{x},\overline{y},\omega)$, $W_{ij}(\overline{x},\overline{y},\omega)$, $K_{ij}(\overline{x},\overline{y},\omega)$, $F_{ij}(\overline{x},\overline{y},\omega)$ — фундаментальные решения динамической теории упругости [3], имеющие различный порядок сингулярности; $\overline{x}, \overline{y}$ — точки наблюдения и нагружения, верхние индексы 1, 2, *соответствуют полупространствам и участкам границ, нижние индексы $i, j = 1, 2, 3$.

В системе уравнений неизвестными являются компоненты комплексных амплитуд перемещений на берегах трещины, а также перемещений и усилий на поверхности сцепления материалов.

Результаты расчетов. Для численного решения используется прямой вариант метода граничных элементов с постоянной аппроксимацией параметров в пределах элементов.

Расчеты выполнены для круговой трещины радиусом R в плоскости соединения материалов сталь — алюминий при гармоническом нагружении берегов трещины волной растяжения — сжатия. При этом приняты следующие характеристики материалов: для стали — модуль упругости $E = 207$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}288$, плотность $\rho = 7860$ кг/м^3; для алюминия — модуль упругости $E = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}347$, плотность $\rho = 2700$ кг/м^3. Продольная волна была направлена по нормали к плоскости сцепления металлов, приведенное волновое число $k_2R = \omega R/c_2$ изменяется в диапазоне $0 \leqslant k_2R \leqslant$ $\leqslant 2{,}0$ (здесь c_2 — скорость поперечных волн в стали). Поверхности трещины и плоскость сцепления материалов за ее фронтом аппроксимировались граничными элементами, которые сгущались у фронта. Наименьший поперечный относительный размер $h/R = 0{,}0625$ имели элементы, примыкающие непосредственно к фронту трещины с разных сторон.

Характерными чертами решения динамической задачи для межфазной трещины являются разные амплитуды нормальных перемещений и наличие разрыва в тангенциальных смещениях противоположных берегов [1], что принципиально отличает ее от трещины в однородной среде [4].

На рис. 1, 2 представлены распределения нормальных и тангенциальных компонент перемещений противоположных берегов на сечении, проходящем по диаметру трещины, в течение периода нагружения.

Приведенные рисунки хорошо иллюстрируют отмеченные особенности напряженно-деформированного состояния межфазной трещины. Нормальный и тангенциальный разрывы перемещений противоположных берегов трещины порождают соответствующие коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

По полученным параметрам напряженно-деформированного состояния в окрестности фронта трещины рассчитаны КИН нормального отрыва K_1 и поперечного сдвига K_2 с использованием асимптотических соотношений из [5]

$$K_1 = \max \lim_{r\to 0} \sigma(\overline{x},t)\sqrt{2\pi r}, \qquad K_2 = \max \lim_{r\to 0} \tau(\overline{x},t)\sqrt{2\pi r}.$$

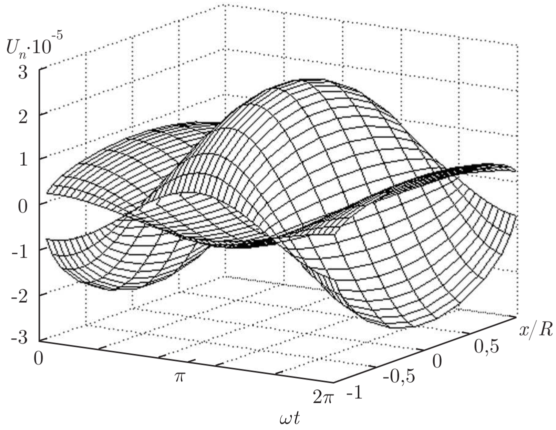

Рис. 1

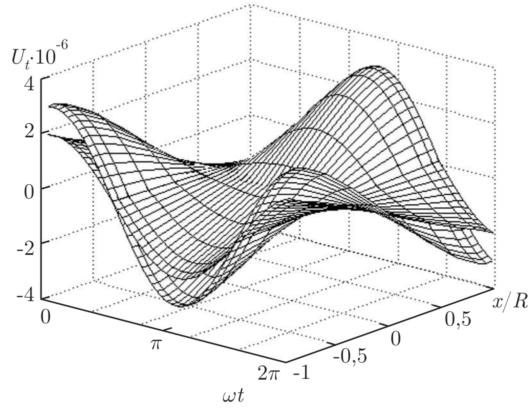

Рис. 2

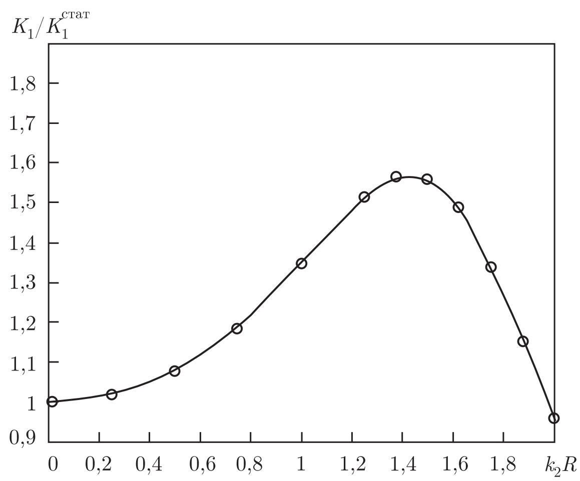

Рис. 3

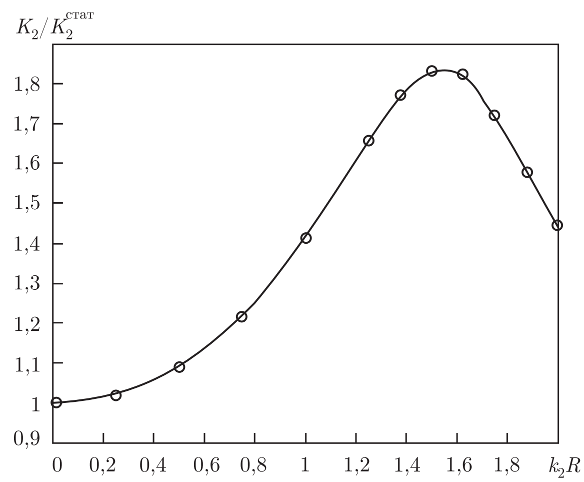

Рис. 4

На рис. 3 и 4 представлены относительные величины КИН в зависимости от параметра нагрузки k_2R.

Видно, что обе моды КИН имеют выраженные максимумы, которые достигаются при близких значениях приведенного волнового числа. Относительная максимальная величина КИН второй моды в условиях рассматриваемой задачи выше величины КИН первой моды на 15%.

Относительные величины получены делением расчетных значений КИН для рассматриваемой динамической задачи на соответствующий КИН для биматериального тела [6] при статическом нагружении:

$$K_1^{\text{стат}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} P_0 (1 - 0{,}7023\beta^2), \qquad K_2^{\text{стат}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} P_0 (1 - 2\ln 2)\beta,$$

где P_0 — усилие статического нагружения; β — биупругая постоянная.

Таким образом, на основе решения динамической задачи теории упругости для биматериального тела с межфазной трещиной рассчитаны коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва и поперечного сдвига для круговой трещины под действием нормальной продольной волны при меняющемся параметре нагружения.

1. *Меньшиков В. А.* Круговая трещина в плоскости раздела упругих материалов под действием нормальной гармонической нагрузки // Теорет. и прикл. механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 166–170.
2. *Меньшиков В. А., Меньшиков А. В.* Гранично-контактные интегральные уравнения динамической задачи теории упругости о трещине на поверхности раздела полупространств // Доп. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 51–56.
3. *Меньшиков В. А.* Сингулярные ядра интегральных уравнений в задаче о трещине на границе раздела полупространств при гармоническом нагружении // Там само. – № 11. – С. 58–62.
4. *Гузь А. Н., Зозуля В. В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Т. 4. Кн. 2. – Киев: Наук. думка, 1993. – 236 с.
5. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
6. *Вайншельбаум В. М., Гольдштейн Р. В.* Осесимметричная задача о трещине на границе раздела слоев в многослойной среде // Механика тв. тела. – 1976. – № 2. – С. 130–143.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 07.06.2007

УДК 539.3

С. М. Яремченко

Про розв'язання двовимірних крайових задач статики некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці із застосуванням сплайн-функцій

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

The aspects of applications of the spline method and the discrete orthogonalization method to the solution of 2D boundary-value problems on a stress-strain state of noncircular cylindrical shells in a refined formulation are analyzed. The accuracy of solutions is estimated.

З розвитком комп'ютерної техніки все частіше для дослідження фізичних явищ застосовуються сплайн-функції [1]. На першому етапі розвитку основним завданням сплайнів, яке вони успішно виконують і зараз, було наближення кривих і поверхонь. Пізніше через зручність у використанні сплайн-апроксимація все частіше стає однією зі складових частин різних методів розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла, серед таких можна назвати методи скінченних та граничних елементів та метод колокацій [2]. Також розроблено підходи, що дозволяють звести двовимірні крайові задачі до одновимірних, використовуючи апроксимацію сплайнами в одному з координатних напрямків, а в іншому провести чисельне інтегрування. Зокрема, можна відзначити роботи, де проводилися розрахунки напруженого стану [3], а також розв'язувалися задачі про власні коливання [4] пластин і оболонок за допомогою такого підходу.

У даній роботі викладаються основні аспекти застосування методу сплайн-апроксимації разом з методом дискретної ортогоналізації до розв'язання двовимірних задач про напружений стан некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці [5] та дається оцінка точності одержаних результатів.