11. *Robinson D. J. S.* On the cohomology of soluble groups of finite rank // J. Pure and Appl. Algebra. – 1975. – **6**. – P. 155–164.
12. *Robinson D. J. S.* Soluble products of nilpotent groups // J. Algebra. – 1986. – **98**. – P. 183–196.

Дніпропетровський національний університет *Надійшло до редакції 05.03.2007*

УДК 517.925

І. І. Король, член-кореспондент НАН України **М. О. Перестюк**

Існування і наближена побудова розв'язків крайових задач

A new numerical-analytic method for investigating the boundary-value problems for nonlinear differential systems is suggested.

Серед методів інтегрування крайових задач широко відомим є чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка [1]. Зокрема, він застосовується до знаходження розв'язків рівняння

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x),$$

які задовольняють різного роду додаткові умови. Однією з умов, які накладаються на функцію $f(t, x)$, є умова малості константи Ліпшіца [2]. Непокращувану оцінку для неї знайдено в [3]. У даному повідомленні пропонується підхід до розв'язання поставленої в [2] задачі про знаходження аналогічних оцінок у випадку, коли компонентами матриці Ліпшіца є невід'ємні інтегровні функції. При цьому умова малості матриці Ліпшіца накладається не на всю функцію $F(t, x)$, а тільки на її нелінійну частину $f(t, x)$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з виділеною лінійною частиною

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x) \tag{1}$$

та лінійними функціональними обмеженнями

$$\ell x = \alpha, \tag{2}$$

де $t \in [a, b]$, $x\colon [a, b] \to D \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon [a, b] \times D \to \mathbb{R}^n$, $A(t) = (A_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $A(t) \in C[a, b]$, ℓ — лінійний вектор-функціонал, $\ell\colon C([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ — сталий вектор.

Згідно з теоремою Ф. Рісса [4], завжди можна вказати неперервну зліва матричнозначну функцію $C(t)$ обмеженої варіації таку, що лінійний функціонал можна зобразити за допомогою інтеграла Рімана–Стілтєса, а отже, можемо записати крайові умови (2) у вигляді

$$\int_a^b [dC(t)]x(t) = \alpha. \tag{3}$$

Розглянемо критичний [5] випадок — коли однорідна крайова задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad \ell x = 0, \tag{4}$$

має k, $0 < k \leqslant n$, лінійно незалежних розв'язків.

Введемо такі позначення:

$$Z(s) = \int_s^b [dC(t)]\Omega_s^t, \qquad G = Z(a) = \ell\Omega_a^{\bullet} = \int_a^b [dC(t)]\Omega_a^t,$$

де Ω_a^a, $\Omega_a^a = I_n$ — матрицант відповідної (1) лінійної однорідної системи. Через G^+ будемо позначати єдину псевдообернену до G за Муром–Пенроузом [6] $(n\times n)$-матрицю, а через P_{G_k} і $P_{G_k^*}$ — $(n \times k)$- і $(k \times n)$-вимірні матриці, які є ортопроекторами з простору $\mathbb{R}^n$ на нуль простори $\mathrm{Ker}(G)$ і $\mathrm{Ker}(G^*)$ матриць G і G^* відповідно, причому стовпці матриці P_{G_k} є лінійно незалежними і утворюють повний базис ядра $\mathrm{Ker}(G)$ матриці G, а рядки матриці $P_{G_k^*}$ утворюють повний базис ядра матриці G^*:

$$P_{G_k}\colon \mathbb{R}^k \to \mathrm{Ker}(G), \qquad \mathrm{Ker}(G) = P_{G_k}\mathbb{R}^n,$$
$$P_{G_k^*}\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Ker}(G^*), \qquad \mathrm{Ker}(G^*) = P_{G_k^*}\mathbb{R}^n,$$
$$\mathrm{rank}(P_{G_k}) = \mathrm{rank}(P_{G_k^*}) = k = n - \mathrm{rank}(G).$$

Припускаємо, що при $t \in [a,b]$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, де D — деяка замкнена обмежена область, справедливі такі припущення:

A) вектор-функція $f(t,x)$ неперервна і виконуються оцінки

$$|f(t,x)| \leqslant M(t), \qquad |f(t,x') - f(t,x'')| \leqslant K(t)\cdot|x' - x''|,$$

де $M(t)$ і $K(t)$ — неперервні відповідно вектор-функція і матриця-функція з невід'ємними інтегровними компонентами. Тут $|f(t,x)| = \mathrm{col}(|f_1(t,x)|,\ldots,|f_n(t,x)|)$ і всі нерівності розглядаємо покомпонентно;

B) $D_\beta \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^k | B(x_0(t,\xi),\beta) \subseteq D\} \neq \varnothing$, де $B(x_0,\beta)$ — круг з центром в

$$x_0 = x_0(t,\xi) = \Omega_0^t P_{G_k}\xi + \Omega_a^t(G^+ + (R(t) - G^+R_2)P_{G_k}^* R_1^{-1} P_{G_k^*})\alpha,$$

і радіусом $\beta = \max\limits_{t\in[a,b]} \displaystyle\int_a^b |L(t,s)|\cdot M(s)\,ds$, де

$$L(t,s) = \begin{cases} \Omega_s^t - \Omega_a^t(G^+ + (R(t) - G^+R_2)P_{G_k^*}^* R_1^{-1} P_{G_k^*})Z(s), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \\ -\Omega_a^t(G^+ + (R(t) - G^+R_2)P_{G_k^*}^* R_1^{-1} P_{G_k^*})Z(s), & 0 \leqslant t < s \leqslant b, \end{cases}$$

$$R(t) = \int_a^t \Omega_s^a Z^*(s)\,ds, \qquad R_1 = P_{G_k^*} R_2 P_{G_k^*}^*, \qquad R_2 = \int_a^b Z(\tau)Z^*(\tau)d\tau;$$

C) найбільше додатне власне значення оператора Qx менше за одиницю,

$$(Qx)(t) = \int_a^b |L(t,s)|K(s)x(s)\,ds.$$

Зауваження 1. Матриця R_1 є невиродженою, оскільки $R_1 = \int_a^b \Psi(\tau)\Psi^*(\tau)d\tau$, де $\Psi(\tau)$ — $(k \times n)$-вимірна матриця така, що [7]

$$\frac{d\Psi^*}{dt} = -A^*(t)\Psi^* - \frac{dC^*(t)}{dt}P^*_{G^*_k},$$
$$\Psi^*(a) = 0, \qquad \Psi^*(b) = 0.$$

Розглянемо сім'ю k-параметричних відображень $\mathcal{L}_\xi x\colon C([a,b],\mathbb{R}^n) \to C([a,b],\mathbb{R}^n)$ і вектор-функціонал $\mu(x)\colon C(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^k$:

$$(\mathcal{L}_\xi x)(t) = \Omega_a^t(P_{G_k}\xi + G^+\alpha) + \Omega_a^t(R(t) - G^+R_2)P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\alpha + \int_a^b L(t,s)f(s,x(s))\,ds,$$

$$\mu(x) = P_{G^*_k}\left(\alpha - \int_a^b Z(\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau\right).$$

Лема. *Нехай однорідна крайова задача* (4) *має* k *лінійно незалежних розв'язків. Вектор-функція* $\varphi \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ *є розв'язком крайової задачі* (1), (2) *тоді і тільки тоді, коли* φ *є розв'язком системи рівнянь*

$$x = \mathcal{L}_\xi x, \tag{5}$$
$$\mu(x) = 0. \tag{6}$$

При цьому початковим значенням розв'язку крайової задачі є

$$\varphi(a) = \varphi_0 \overset{def}{=} P_{G_k}\xi + G^+\left(\alpha - \int_a^b Z(\tau)f(\tau,\varphi(\tau))d\tau\right).$$

Доведення. Вектор-функція $\varphi(t)$ є розв'язком системи (5) і при $t = a$ набуває значень $\varphi(a) = \varphi_0$, якщо і тільки якщо $\varphi(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = \Omega_a^t\varphi_0 + \int_a^t \Omega_a^t f(s,x(s))\,ds. \tag{7}$$

Підставляючи (7) в умови (2), бачимо, що $\varphi(t)$ є розв'язком крайової задачі (1), (2) тоді і тільки тоді, коли $\mu(\varphi) = 0$. У той же час вимога, щоб φ була розв'язком рівняння (6), є необхідною і достатньою для того, щоб φ задовольняла одночасно і рівняння (5) і рівняння (7). Лему доведено.

Для знаходження розв'язку крайової задачі (1), (2) побудуємо рекурентну k-параметричну послідовність функцій

$$
\begin{aligned}
x_0(t,\xi) &= \Omega_a^t P_{G_k}\xi + \Omega_a^t (G^+ + (R(t) - G^+ R_2) P_{G_k}^* R_1^{-1} P_{G_k^*})\alpha, \\
&\quad m = 1, 2, \ldots, \qquad \xi \in \mathbb{R}^k, \\
x_m(t,\xi) &= x_0(t,\xi) + \int\limits_a^b L(t,s) f(s, x_{m-1}(s,\xi))\, ds,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

які задовольняють крайові умови (2) при будь-яких значеннях параметра ξ.

Справедливі такі оцінки відхилень:

$$
|(\mathcal{L}_\xi x)(t) - x_0(t,\xi)| \leqslant \int\limits_0^T |L(t,s)||f(s,x(s))\, ds| \leqslant \int\limits_0^T |L(t,s)| M(s)\, ds \leqslant \beta, \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
|x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi)| &= |(\widetilde{L}_\xi (x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi)))(t)| \leqslant \\
&\leqslant (Q|x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi)|)(t) \leqslant (Q^2|x_{m-1}(\cdot,\xi) - x_{m-2}(\cdot,\xi)|)(t) \leqslant \ldots \leqslant \\
&\leqslant (Q^m|x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi)|)(t) \leqslant Q^m \beta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|x_{m+j}(t,\xi) - x_m(t,\xi)| &\leqslant \sum_{i=0}^{j-1} |x_{m+i+1}(t,\xi) - x_{m+i}(t,\xi)| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{j-1} (Q^{m+i}|x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi)|)(t) \leqslant \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\beta.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

З (9) і умов A, C випливає, що $(\mathcal{L}_\xi x)(t) \in D$ при всіх $\xi \in D_\beta$, $t \in [a,b]$, $x \in C([a,b],D)$. Крім того, з умови D випливає, що послідовність (8) рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t,\xi) \in [a,b] \times D_\beta$ до граничної функції $x^*(t,\xi)$, яка співпадає з нерухомою точкою $x = x^*(\cdot,\xi)$ оператора $\mathcal{L}_\xi$. Оскільки $\sum\limits_{i=0}^{\infty} Q^i = (I_n - Q)^{-1}$, то переходячи в (10) до границі при $j \to \infty$ одержимо, що

$$
|x^*(t,\xi) - x_m(t,\xi)| \leqslant (I_n - Q)^{-1} Q^m \beta. \tag{11}
$$

Справедливим є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай однорідна крайова задача* (4) *має* k *лінійно незалежних розв'язків і для крайової задачі* (1), (2) *справедливі припущення* A–C. *Тоді:*

1) при всіх $\xi \in D_\beta \subset \mathbb{R}^k$ *оператор* $\mathcal{L}_\xi$ *має нерухому точку* $x^*(\cdot,\xi) \in ([a,b],D)$, *яка співпадає з граничною функцією* $x^*(t,\xi) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t,\xi)$ *послідовності (8). Для збіжності послідовних наближень при всіх натуральних m виконуються оцінки* (11)*;*

2) функція $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ *є розв'язком крайової задачі* (1), (2) *тоді і тільки тоді, коли точка* $\xi = \xi^*$ *є розв'язком визначального рівняння* $\Delta(\xi) = 0$, *де* $\Delta\colon D_\beta \to \mathbb{R}^k$

$$
\Delta(\xi) \overset{def}{=} \mu(x^*(\cdot,\xi)) = P_{G_k^*}\Bigg(\alpha - \int\limits_a^b Z(\tau) f(\tau, x^*(\tau,\xi))\, d\tau\Bigg). \tag{12}
$$

При цьому

$$x^*(a,\xi) = P_{G_k}\xi + G^+\left(\alpha - \int\limits_a^b Z(\tau)f(\tau, x^*(\tau,\xi))d\tau\right).$$

Наведене нижче твердження містить достатні умови, для перевірки яких не потрібно знаходити граничну функцію послідовності (8).

Теорема 2. *Нехай однорідна крайова задача* (4) *має k лінійно незалежних розв'язків і для крайової задачі* (1), (2) *справедливі припущення* A$-$C *і, крім того:*

1) існує опукла, замкнена область $D' \subset D_\beta \subset \mathbb{R}^k$ така, що при деякому фіксованому натуральному m відображення $\Delta_m(\xi)\colon D_\beta \to \mathbb{R}^k$:

$$\Delta_m(\xi) \overset{def}{=} \mu(x_m(\cdot,\xi)) = P_{G_k^*}\left(\alpha - \int\limits_a^b Z(\tau)f(\tau, x_m(\tau,\xi))d\tau\right)$$

містить в області D' єдину особливу точку ξ_{0m} ненульового індексу;

2) на границі $\partial D'$ області D' виконується нерівність

$$\inf_{\xi\in\partial D'} |\Delta_m(\xi)| > Q_1(I_n - Q)^{-1}Q^m\beta, \tag{13}$$

де $Q_1 = |P_{G_k^*}| \int\limits_0^T |Z(s)|K(s)\,ds$.

Тоді існує розв'язок

$$x = x^*(t) = x^*(t,\xi^*), \qquad x^*(a) = x^*(a,\xi) = P_{G_k}\xi + G^+\left(\alpha - \int\limits_a^b Z(\tau)f(\tau, x^*(\tau))\,d\tau\right)$$

крайової задачі (1), (2), *де* $\xi^* \in D'$.

Доведення проводиться аналогічно до доведення теореми 3 [8].

Некритичний випадок. У некритичному випадку (коли відповідна однорідна крайова задача (4) має тільки тривіальний розв'язок, тобто $\det(G) \neq 0$, $P_{G_k} = 0$ і $\Delta(\xi) \equiv 0$) при застосуванні запропонованого варіанта чисельно-аналітичного методу не потрібно розв'язувати визначальне рівняння. Аналогічно до теореми 1, можемо довести таке твердження.

Теорема 3. *Нехай однорідна крайова задача* (4) *не має нетривіальних розв'язків і для крайової задачі* (1), (2) *справедливі припущення* A *і*

B*1)* $\widetilde{x}_0(t,\xi) = \Omega_a^t G^{-1}\alpha$ *лежить в області D разом із своїм $\widetilde{\beta}$-околом, де*

$$\widetilde{\beta} = \max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |\widetilde{L}(t,s)|M(s)ds, \qquad \widetilde{L}(t,s) = \begin{cases} \Omega_s^t - \Omega_a^t G^{-1}Z(s), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \\ -\Omega_a^t G^{-1}Z(s), & 0 \leqslant t < s \leqslant b, \end{cases}$$

тоді крайова задача (1), (2) *має не менше одного розв'язку.*

Якщо, крім того, виконується також і умова

C*1) найбільше додатне власне значення оператора $\widetilde{Q}x$ менше за одиницю,*

$$(\widetilde{Q}x)(t) = \int\limits_a^b |\widetilde{L}(t,s)| \cdot K(s)x(s)\,ds,$$

то в області D крайова задача (1), (2) *має єдиний розв'язок* $\widetilde{x}^*(t) = \lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{x}_m(t)$, *який є границею послідовності функцій*

$$\widetilde{x}_m(t,\xi) = \widetilde{x}_0(t,\xi) + \int\limits_a^b \widetilde{L}(t,s) f(s, \widetilde{x}_{m-1}(s,\xi))\, ds, \qquad m = 1,2,\ldots,$$

$$\widetilde{x}_0(t) = \Omega_a^t G^{-1} \alpha.$$

При цьому виконуються оцінки збіжності

$$|\widetilde{x}^*(t) - \widetilde{x}_m(t)| \leqslant (I_n - \widetilde{Q})^{-1} \widetilde{Q}^m \widetilde{\beta}.$$

Зауваження 2. При $A = 0$ одержуємо варіант чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка без визначального рівняння, запропонований в [9].

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
2. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**. – С. 102–107.
3. *Самойленко А. М.* Об одной последовательности полиномов и радиусе сходимости ее суммы Пуассона-Абеля // Там же. – 2003. – **55**, № 7. – С. 1119–1130.
4. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа: Учеб. пособие. – Москва: Высш. шк., 1982. – 271 с.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – VSP Utrecht Boston, 2004. – 320 p.
6. *Penrose R.* A Generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1955. – **55**, No 3. – P. 406–413.
7. *Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O.* Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints. – Praha: Academia, 1979. – 248 p.
8. *Король І. І., Перестюк М. О.* Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А. М. Самойленка // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 4. – С. 472–488.
9. *Трофимчук Е. П., Коваленко А. В.* Численно-аналитический метод А. М. Самойленко без определяющего уравнения // Там же. – 1995. – **47**, № 1. – С. 138–140.

Ужгородський національний університет
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 15.03.2007