



УДК 539.3:534.1

© 2007

А. А. Бондаренко

Об одном методе определения комплексных корней дисперсионных уравнений

(Представлено академиком НАН Украины В. Т. Гринченко)

The paper presents a method for the numerical solution of systems of nonlinear equations with local convergence. The method is applied to determining the complex curves of dispersional spectra for an elastic isotropic infinite layer and a waveguide with square cross-section. Data presented tabularly or graphically are in good agreement with those given in the literature.

Проблема отыскания действительных корней системы нелинейных уравнений вида

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0 \quad (1)$$

принадлежит, согласно [1, 2], к числу труднейших задач численного анализа. Решением системы (1) являются точки пересечения нулевых контуров функций f и g , т.е. линий пересечения поверхностей, задаваемых указанными функциями, с плоскостью Oxy .

В настоящее время в литературе существует значительное число подходов к решению данной задачи. В каждой конкретной ситуации необходимо знать дополнительную информацию о поведении функций и расположении нулевых контуров. Например, в известном методе Ньютона–Рафсона наряду с указанием начального приближения к решению требуется дифференцируемость функций f и g . Большинство методов обладает локальной сходимостью к корню, т.е. при неудачном выборе начальной точки алгоритм расходится. Попытки обхода указанного ограничения сводятся к комбинированию метода Ньютона–Рафсона с алгоритмами поиска минимальных значений функции. Созданные таким образом обобщенный метод Ньютона–Рафсона [1] (или метод релаксации) и многомерный метод секущих [2] (или метод Бройдена) являются менее чувствительными к выбору начального приближения. Дальнейшее совершенствование методов с использованием подхода Левенберга–Маквардта [1] приводит к их значительному усложнению. Такие методы достаточно надежны и реализованы в качестве базовых алгоритмов в различных пакетах прикладных программ.

Во многих случаях уравнения (1) выражаются в более конкретном виде, а именно, отыскание корней уравнения $F(z, \Omega) = 0$, где F — аналитическая функция комплексного

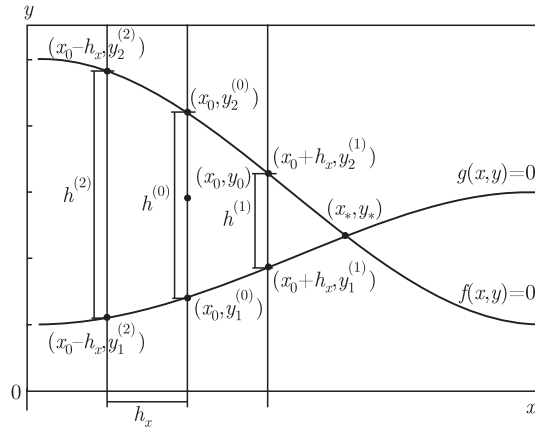


Рис. 1. Определение корней (x_*, y_*) системы уравнений (1) с использованием начального приближения (x_0, y_0)

аргумента $z = x + iy$ при действительном параметре Ω . Например, в динамических задачах теории упругости при изучении дисперсионных характеристик волноводов подобные уравнения связывают частоту Ω с комплексной константой распространения z . В этих случаях поиск корней может осуществляться с помощью известной теоремы о вычетах аналитической функции [3], что иногда связано с большими затратами времени вычислений даже при использовании современной вычислительной техники.

В данной работе предлагается алгоритм, позволяющий достаточно просто определять корни системы уравнений (1). Являясь комбинацией методов координатного шага и секущих, метод обладает локальной сходимостью и требует знания хорошего начального приближения, однако, оказывается удобным для решения определенного класса прикладных задач. Суть предлагаемого подхода изложим с помощью геометрических построений.

Пусть задана некоторая начальная точка (x_0, y_0) , которая достаточно близко расположена к корню (x_*, y_*) . Таким образом, нулевые контуры функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ пересекаются в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) (рис. 1). Для уточнения корня зададимся величинами шагов h_x и h_y вдоль осей Ox и Oy , соответственно. Проведем через точку (x_0, y_0) прямую $x = x_0$. Перемещаясь вдоль нее с шагом h_y , определим точки пересечения $(x_0, y_1^{(0)})$ и $(x_0, y_2^{(0)})$ с линиями $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$ по смене знака функций при переходе через соответствующий нулевой контур. Отступим от начальной точки вправо и влево вдоль оси Ox и повторим описанные действия с точками $(x_0 + h_x, y_0)$ и $(x_0 - h_x, y_0)$. Определим расстояния между ординатами трех пар точек пересечения построенных прямых с нулевыми контурами функций следующим образом:

$$h^{(0)} = |y_2^{(0)} - y_1^{(0)}|, \quad h^{(1)} = |y_2^{(1)} - y_1^{(1)}|, \quad h^{(2)} = |y_2^{(2)} - y_1^{(2)}|.$$

Анализ вычисленных величин позволяет делать выводы о близости начального приближения к искомому корню. Если $h^{(1)} > h^{(0)}$, а также $h^{(2)} > h^{(0)}$ и $h^{(0)} < h_y$, то точка $(x_0, (y_2^{(0)} + y_1^{(0)})/2)$ является корнем системы уравнений (1) с точностью $h = \max(h_x, h_y)$. Полученное решение можно уточнить, уменьшая значения шагов разбиения h_x и h_y . Если $h^{(2)} \geq h^{(0)} \geq h^{(1)}$ (или $h^{(1)} \geq h^{(0)} \geq h^{(2)}$), то корень расположен правее (левее) вдоль оси Ox по отношению к начальной точке. Выбирая в качестве начальной точку с координатами

$(x_0 + h_x, (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})/2)$ (или $(x_0 - h_x, (y_2^{(2)} + y_1^{(2)})/2)$) для повторного прохождения алгоритма, получим следующее приближение к корню системы уравнений (1).

Описанный метод плохо сходится в случае параллельного или почти параллельного расположения нулевых линий $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$ осям Ox и Oy , на что указывает выполнение неравенств $|y_1^{(0)}| \gg |y_0|$ и $|y_2^{(0)}| \gg |y_0|$. Тогда нулевые контуры следует пересекать линиями $x = y$ вместо $x = \text{const}$, изменив соответствующим образом остальные шаги алгоритма.

Нулевые контуры функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ могут располагаться совершенно произвольно, поэтому возникает важный вопрос о поиске хороших начальных приближений (x_0, y_0) для надежности работы метода. Он может быть решен построением линий $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$ по смене знака функции при переходе через соответствующий контур в каждой прямоугольной ячейке, образованной в результате наложения на плоскость Oxy довольно крупной сетки. Найденные таким образом точки пересечения нулевых контуров уточняются с помощью предложенного алгоритма.

Применение метода иллюстрируется построением комплексных участков дисперсионных кривых упругого изотропного слоя и волновода квадратного поперечного сечения.

Для симметричных относительно срединной плоскости нормальных волн в упругом слое дисперсионное соотношение, связывающее безразмерную частоту $\Omega = 2\omega b/\pi c_2$ ($2b$ — толщина слоя; c_2 — скорость волн сдвига в безграничной среде) с безразмерной постоянной распространения $z = 2\bar{z}b/\pi$, имеет вид [4]

$$F(z, \Omega) = (2z^2 - \Omega^2) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2} + 4\alpha\beta z^2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} \cos \frac{\pi\beta}{2} = 0, \quad (2)$$

где $\alpha^2 = \Omega^2/k^2 - z^2$; $\beta^2 = \Omega^2 - z^2$; $k^2 = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$; ν — коэффициент Пуассона материала. Функция $F(z, \Omega)$ в уравнении (2) в зависимости от значения величины z (вещественное, мнимое или комплексное) является вещественной или комплексной. Процедура локализации комплексных корней основывается на определении их значений на плоскости $\Omega = 0$, т. е. на решении статической задачи. При $\Omega \rightarrow 0$ и конечном z уравнение (2) принимает вид

$$\text{sh } \pi z + \pi z = 0. \quad (3)$$

Характерной особенностью данного уравнения является независимость его корней от коэффициента Пуассона ν . Нулевые контуры для функции в уравнении (3) представлены на рис. 2 (сплошными линиями обозначены контуры $\text{Re } F(z, 0) = 0$, штриховыми — $\text{Im } F(z, 0) = 0$). Первые шесть комплексных корней, вычисленных предлагаемым методом, приведены в табл. 1. Полученные результаты хорошо согласуются со значениями корней, найденными с помощью релаксационной процедуры [5].

Таблица 1. Первые шесть комплексных корней уравнения $\text{sh } \pi z + \pi z = 0$

n	$\text{Re } z$	$\text{Im } z$
1	0,7164	1,3408
2	0,9878	3,4099
3	1,1303	5,4346
4	1,2283	7,4479
5	1,3031	9,4564
6	1,3636	11,462

С учетом начальных приближений из табл. 1 вычислены первые три комплексные ветви для симметричных волн в слое при $\nu = 0,31$, числовые данные для которых приведены в табл. 2. Результаты при $\nu = 0,3$, полученные для случаев симметричных и антисимметричных волн в слое, с точностью до 10^{-4} совпадают с данными работы [6].

Дисперсионные соотношения для упругого волновода квадратного поперечного сечения представляются бесконечной системой уравнений [7, 8], поиск корней которой является сложной вычислительной задачей. Описание способов корректной редукции такой системы и ее детальный анализ приведены в работе [4] и не являются предметом настоящего сообщения. Равенство нулю определителя редуцированной системы дает уравнение для определения комплексных корней [8, 9]. Для квадратного волновода даже в статическом случае не удастся записать дисперсионное соотношение в замкнутой аналитической форме. Расположение нулевых контуров при $\Omega = 0$ в случае волновода квадратного поперечного сечения зависит от коэффициента Пуассона и является более сложным по сравнению со слоем. На рис. 3 изображены первые три точки пересечения нулевых контуров при ($\nu = 0,248$), координаты которых являются начальными приближениями при построении комплексных участков дисперсионных кривых, представленных на рис. 4.

Таблица 2. Комплексные ветви дисперсионных кривых для симметричных волн в упругом слое при $\nu = 0,31$

Ω	Первая ветвь		Вторая ветвь		Третья ветвь	
	Re z	Im z	Re z	Im z	Re z	Im z
0,1	0,7167	1,3383	0,9879	3,4090	1,1304	5,4340
0,2	0,7174	1,3315	0,9881	3,4061	1,1305	5,4323
0,3	0,7187	1,3173	0,9886	3,4014	1,1308	5,4293
0,4	0,7203	1,2986	0,9892	3,3948	1,1311	5,4252
0,5	0,7224	1,2742	0,9900	3,3862	1,1316	5,4199
0,6	0,7248	1,2438	0,9909	3,3757	1,1321	5,4134
0,7	0,7271	1,2068	0,9920	3,3633	1,1327	5,4058
0,8	0,7296	1,1628	0,9932	3,3489	1,1333	5,3969
0,9	0,7314	1,1164	0,9945	3,3325	1,1340	5,3868
1,0	0,7325	1,0499	0,9958	3,3140	1,1348	5,3755
1,1	0,7317	0,9786	0,9973	3,2935	1,1356	5,3630
1,2	0,7277	0,8950	0,9987	3,2708	1,1365	5,3492
1,3	0,7173	0,7969	1,0001	3,2461	1,1373	5,3342
1,4	0,6951	0,6834	1,0015	3,2191	1,1382	5,3180
1,5	0,6555	0,5589	1,0028	3,1898	1,1390	5,3005
1,6	0,6047	0,4270	1,0039	3,1582	1,1398	5,2816
1,7	0,5552	0,2605	1,0048	3,1242	1,1405	5,2615
1,73	0,5414	0,1855	1,0050	3,1135	1,1407	5,2552
2,3			1,0009	2,8641	1,1423	5,1123
2,9			0,9566	2,4846	1,1338	4,9101
3,5			0,7678	1,9236	1,1022	4,6462
3,7			0,5962	1,6688	1,0826	4,5424
3,8			0,4335	1,5152	1,0703	4,4871
3,86			0,2402	1,4069	1,0620	4,4527
4,2					0,9973	4,2406
4,6					0,8585	3,9460
4,9					0,6537	3,6834
5,1					0,3631	3,4818
5,15					0,2061	3,4272

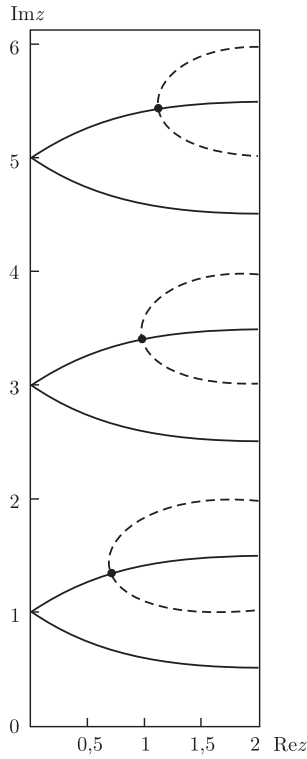


Рис. 2. Нулевые контуры функции $F(z) = \text{sh } \pi z + \pi z$

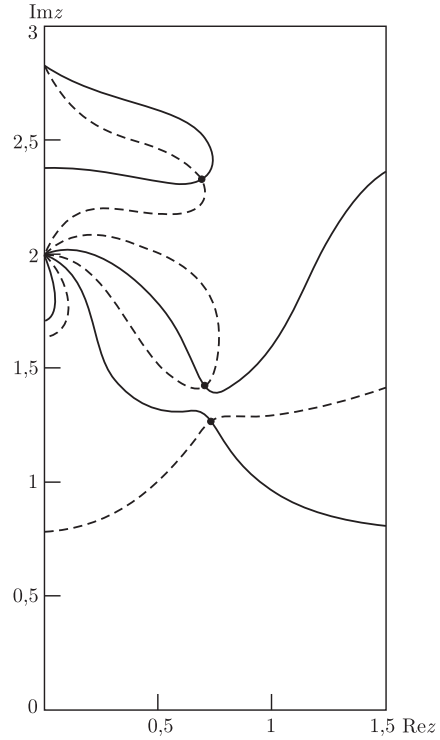


Рис. 3. Нулевые контуры дисперсионного соотношения для квадратного волновода при $\Omega = 0, \nu = 0,248$

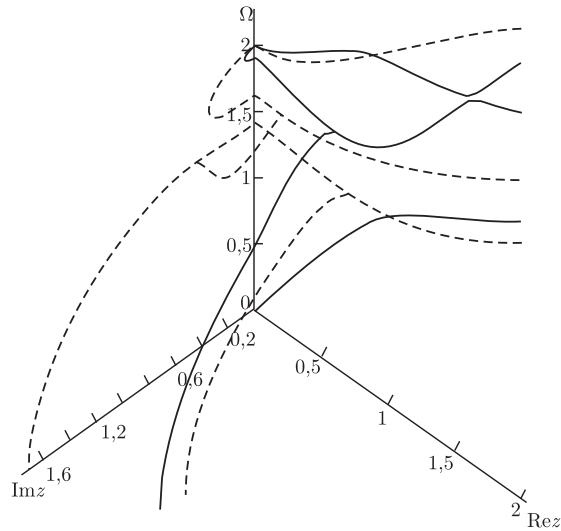


Рис. 4. Дисперсионный спектр квадратного волновода, $\nu = 0,248$

Таким образом, предлагаемый метод позволяет сравнительно просто находить действительные решения системы нелинейных уравнений и комплексные корни уравнений, встречающихся в прикладных задачах. При использовании метода для расчета дисперсионных характеристик волноведущих систем начальные приближения к корням легко определяются, что позволяет строить конкретные участки отдельных ветвей.

1. *Press W. H. et al.* Numerical recipes in C: the art of scientific computing. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. – 964 p.
2. *Broyden C. G.* A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations // *Math. Comp.* – 1965. – **19**. – P. 577–593.
3. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1979. – 319 с.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
5. *Златин А. Н.* О корнях некоторых трансцендентных уравнений, встречающихся в теории упругости // *Прикл. механика.* – 1980. – **16**, № 12. – С. 69–74.
6. *Potter D. S., Leedham C. D.* Normalized numerical solutions for Rayleigh's frequency equation // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1967. – **41**. – P. 148–153.
7. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Дисперсионные свойства нормальных волн в прямоугольном упругом волноводе // X Всесоюз. акуст. конф. – Москва, 1983. – С. 96–99.
8. *Костржицкая Е. В., Мелешко В. В.* Распространение гармонических волн в упругом прямоугольном волноводе // *Прикл. механика.* – 1990. – **26**, № 8. – С. 69–78.
9. *Hayashi T., Tamayama C., Murase M.* Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section // *Ultrasonics.* – 2006. – **41**. – P. 17–24.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 08.05.2007

УДК 539.3

© 2007

Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер

Свободные колебания гладких цилиндрических оболочек с локальными осесимметричными прогибами

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

A new approach to the problem of cylindrical shells vibrations is used for the estimation of the free oscillation frequency of shells with initial local axisymmetric deflections. The analytical solution and the results of calculations are presented.

1. Методика расчета оболочек с прогибами. Рассматриваются свободные колебания цилиндрической оболочки с осесимметричными начальными прогибами в виде вмятин и выпучин (одиночных или регулярных). Части оболочки $\ell_{n+1} - \ell_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N$, где N — число вмятин и выпучин) вследствие наличия начальных прогибов будут искривлены вдоль образующей по радиусам ρ_n и рассматриваются как оболочки, близкие по форме к цилиндрическим с радиусами кривизны r, ρ_n . Полагается, что радиус r имеет столь малое изменение, что можно считать его постоянным по всей длине оболочки. Схема рассматриваемой оболочки показана на рис. 1.