

1. *Press W. H. et al.* Numerical recipes in C: the art of scientific computing. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. – 964 p.
2. *Broyden C. G.* A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations // *Math. Comp.* – 1965. – **19**. – P. 577–593.
3. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1979. – 319 с.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
5. *Златин А. Н.* О корнях некоторых трансцендентных уравнений, встречающихся в теории упругости // *Прикл. механика.* – 1980. – **16**, № 12. – С. 69–74.
6. *Potter D. S., Leedham C. D.* Normalized numerical solutions for Rayleigh's frequency equation // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1967. – **41**. – P. 148–153.
7. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Дисперсионные свойства нормальных волн в прямоугольном упругом волноводе // X Всесоюз. акуст. конф. – Москва, 1983. – С. 96–99.
8. *Костржицкая Е. В., Мелешко В. В.* Распространение гармонических волн в упругом прямоугольном волноводе // *Прикл. механика.* – 1990. – **26**, № 8. – С. 69–78.
9. *Hayashi T., Tamayama C., Murase M.* Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section // *Ultrasonics.* – 2006. – **41**. – P. 17–24.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 08.05.2007

УДК 539.3

© 2007

Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер

Свободные колебания гладких цилиндрических оболочек с локальными осесимметричными прогибами

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

A new approach to the problem of cylindrical shells vibrations is used for the estimation of the free oscillation frequency of shells with initial local axisymmetric deflections. The analytical solution and the results of calculations are presented.

1. Методика расчета оболочек с прогибами. Рассматриваются свободные колебания цилиндрической оболочки с осесимметричными начальными прогибами в виде вмятин и выпучин (одиночных или регулярных). Части оболочки $\ell_{n+1} - \ell_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N$, где N — число вмятин и выпучин) вследствие наличия начальных прогибов будут искривлены вдоль образующей по радиусам ρ_n и рассматриваются как оболочки, близкие по форме к цилиндрическим с радиусами кривизны r, ρ_n . Полагается, что радиус r имеет столь малое изменение, что можно считать его постоянным по всей длине оболочки. Схема рассматриваемой оболочки показана на рис. 1.

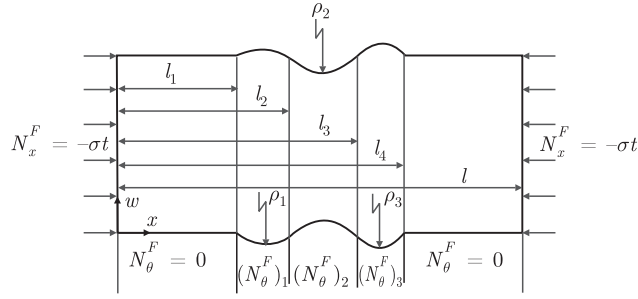


Рис. 1

Оболочка подвержена равномерному продольному сжатию и в ней в безмоментном состоянии возникают следующие усилия: продольное N_x^F , окружные $(N_\theta^F)_n$

$$\{N_x^F, (N_\theta^F)_n\} = -\sigma t \begin{cases} 1, & 0 & \text{при} & x \in [0, \ell_1] \cap x \in [\ell_4, \ell], \\ 1, & -\rho_n & \text{при} & x \in [\ell_n, \ell_{n+1}], \end{cases} \quad (1)$$

где σ — докритическое сжимающее нормальное напряжение; h — толщина оболочки; $r_n = r/\rho_n$.

Здесь введено предположение, что прогибы могут размещаться в произвольном месте оболочки. Для расчета таких оболочек обобщается методика работ [1–3].

Уравнения движения оболочки получим, используя принцип стационарности действия Остроградского–Гамильтона [4]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (V - T) dt = 0, \quad (2)$$

где V и T — потенциальная и кинетическая энергии системы.

Потенциальная энергия оболочки с прогибами приведена в [1] и имеет вид

$$\begin{aligned} V_2 = & \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{r} \right)^2 - 2(1 - \mu) \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{r} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1 - \mu}{2} \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} r dx d\theta + \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2(1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{r \partial x} \right)^2 \right] \right\} r dx d\theta + \\ & + \frac{K}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho_n} \int_0^{2\pi} \int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} w \left[\frac{w}{\rho_n} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right] r dx d\theta + \\ & + \frac{D}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho_n} \int_0^{2\pi} \int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \left\{ \frac{1}{\rho_n} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial u}{r^2 \partial \theta} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\rho_n \partial \theta} \right) \Big\} r dx d\theta - \\
& - \frac{K}{2} \frac{\sigma}{E} (1-\mu^2) \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 r dx d\theta - \sum_{n=1}^N \rho_n \int_0^{2\pi} \int_0^{\ell_{n+1}} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 r dx d\theta \right]. \quad (3)
\end{aligned}$$

Выражение для кинетической энергии цилиндрической оболочки следующее:

$$T = \frac{h\rho_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] r dx d\theta, \quad (4)$$

где ρ_0 — плотность материала обшивки.

Исследование выполнено для оболочки, шарнирно опертой по торцам.

Выражения для компонент перемещений, удовлетворяющих этим условиям, выбираем в виде

$$\begin{aligned}
u &= (u_{1ij} \cos i_1\theta + u_{2ij} \sin i_2\theta) \cos \frac{\lambda x}{r} \cos \omega t, \\
v &= (v_{1ij} \sin i_1\theta + v_{2ij} \cos i_2\theta) \sin \frac{\lambda x}{r} \cos \omega t, \\
w &= (w_{1ij} \cos i_1\theta + w_{2ij} \cos i_2\theta) \sin \frac{\lambda x}{r} \cos \omega t,
\end{aligned} \quad (5)$$

где $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ — произвольные постоянные; $\lambda = j\pi r/\ell$; j — число полуволин по длине; i — числа полных волн по окружности; ω — собственная частота; t — временная координата.

Функции u_1, v_1, w_1 описывают изгиб ребер, а u_2, v_2, w_2 — их кручение, причем используются они раздельно, а не вместе. В последующих формулах индексы 1 и 2 опущены.

После подстановки выражения (5) в (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{K\pi\ell}{4r} \{ (u_{ij}\lambda - iv_{ij} + w_{ij})^2 + 2(1-\mu)u_{ij}(iv_{ij} - w_{ij}) + \frac{1-\mu}{2}(-u_{ij}i + v_{ij}\lambda)^2 + \\
& + \frac{1}{a} \{ [(\lambda^2 + i^2)w_{ij} - iv_{ij}]^2 + 2(1-\mu)[\lambda^2 w_{ij}(iv_{ij} - i^2 w_{ij}) - (iv_{ij} - i^2 w_{ij})^2] \} + \\
& + S_{12}w_{ij}^2 + 2S_{11}\lambda u_{ij}w_{ij} - 2\mu S_{11}w_{ij}(iv_{ij} - w_{ij}) + \frac{1}{a} [S_{12}\lambda^2 u_{ij}^2 + 2S_{11}\lambda^3 u_{ij}w_{ij} + \\
& + 2\mu S_{11}\lambda u_{ij}(i^2 w_{ij} - iv_{ij}) + 2(1-\mu)[S_{21}iu_{ij}(2i\lambda w_{ij} - 2\lambda v_{ij}) + S_{22}u_{ij}^2] \} - \\
& - \frac{K}{4} \frac{\pi\ell}{r} \frac{\sigma}{E} (1-\mu^2)(\lambda^2 - i^2 S_{11})w_{ij}^2, \quad (6)
\end{aligned}$$

$$T = \frac{h\rho_0\omega^2}{4} (A_1 u^2 + A_2 v^2 + A_3 w^2), \quad (7)$$

где

$$S_{11} = \sum_{n=1}^N r_n I_{1n}, \quad S_{12} = \sum_{n=1}^N r_n^2 I_{1n}, \quad S_{21} = \sum_{n=1}^N r_n I_{2n}, \quad S_{22} = \sum_{n=1}^N r_n^2 I_{2n},$$

$$I_{1n} = \frac{2}{\ell} \int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \sin^2 \frac{\lambda x}{r} dx, \quad I_{2n} = \frac{2}{\ell} \int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \cos^2 \frac{\lambda x}{r} dx, \quad a = \frac{12r^2}{h^2}.$$

Условия экстремума полной энергии системы приводят к следующему уравнению для определения собственных частот колебаний гладкой цилиндрической оболочки:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \omega^2 & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} - \omega^2 & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} i^2 + \frac{1}{a} [\lambda^2 S_{12} + 2(1-\mu) i^2 S_{22}], \\ A_{12} &= -i\lambda \frac{1+\mu}{2} - \frac{i\lambda}{a} [\mu S_{11} + 2(1-\mu) S_{21}], \\ A_{13} &= \lambda\mu + \frac{\lambda}{a} [(\lambda^2 + \mu i^2) S_{11} + 2(1-\mu) i^2 S_{21}], \\ A_{22} &= \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 + i^2 + \frac{1}{a} [i^2 + 2(1-\mu) \lambda^2], \\ A_{23} &= -i(1 + \mu S_{11}) - \frac{i}{a} (i^2 + (2-\mu) \lambda^2), \\ A_{33} &= 1 + S_{12} + 2\mu S_{11} + \frac{1}{a} (\lambda^2 + i^2)^2 - \frac{\sigma}{E} (1 - \mu^2) (\lambda^2 + i^2 S_{11}). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (8) дает три различных значения ω^2 . Однако для тонких оболочек практически важным является только первое собственное значение, поэтому в (8) членами с ω^4 и ω^6 пренебрегаем. Для определения собственных частот колебаний цилиндрической оболочки получаем зависимость

$$\omega_{ij}^2 = \frac{K}{r^2 h \rho_0} \frac{A_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) + 2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{(A_{11}A_{33} - A_{13}^2) + (A_{22}A_{33} - A_{23}^2) + (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}. \quad (10)$$

2. Зависимость частот колебаний от зоны размещения локальных несовершенств и их амплитуд. В качестве объекта исследования рассмотрим оболочки, описанные в работе [3]. Для них принято $\ell/r = 2,25$, $r/h = 400$. Материал оболочки — листовой прокат АМг — 6 м.

На рис. 2 представлена зависимость $\zeta = f(z_j)$, для ненагруженных оболочек $N_x^F = 0$, где $z_j = Zw_0/h$, $Z = \ell^4 \sqrt{1 - \mu^2 / \sqrt{r} h}$, $\zeta = \omega_{cr} / \omega_{\min}$, $\omega_{\min} = (\pi / (rZ)) \sqrt{E / (\rho_0 \sqrt{3})}$ — минимальная частота колебаний идеальной оболочки, соответствующая работе [5, с. 338]. Зона, на которой размещена одиночная осесимметричная вмятина или выпучина (посредине оболочки), определяется величиной $d\ell = \ell_0/\ell$, где ℓ_0 — протяженность вмятины (выпучины).

Как следует из рис. 2, a , величина ζ , связанная с частотой колебаний несовершенной оболочки, ведет себя по-разному для положительных или отрицательных z_j . Она может как возрастать, так и убывать. При наличии вмятин ($z_j \geq 0$): при росте амплитуды вмятины ($0 \leq z_j \leq 0,02$) величина ζ убывает при $0,51 \leq d\ell \leq 1$ и растет при $d\ell > 0,17$.

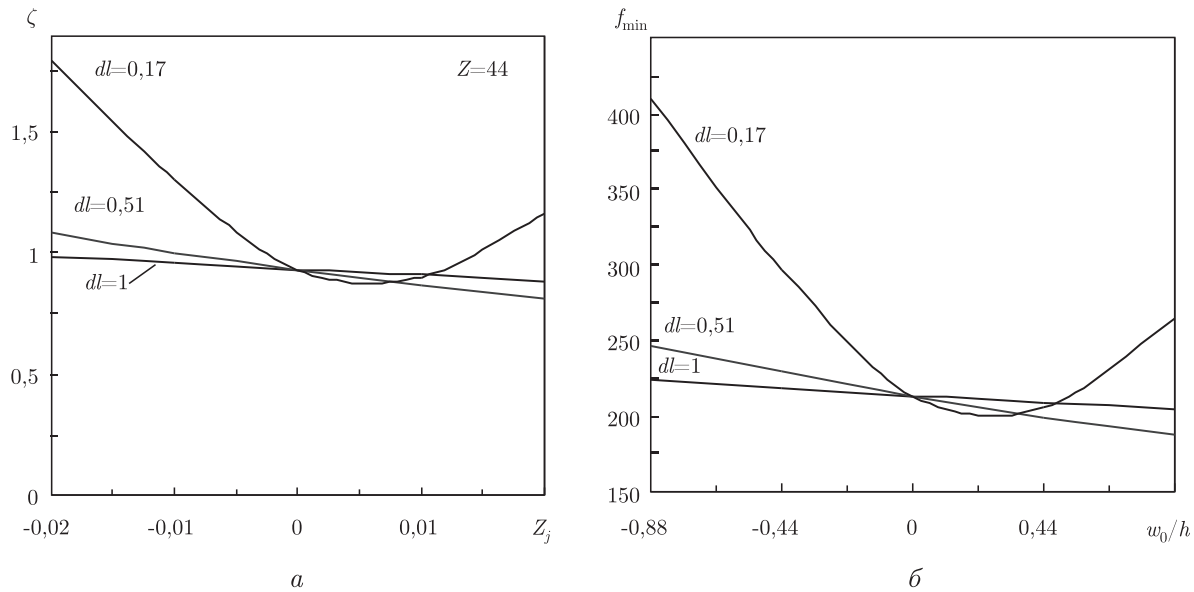


Рис. 2

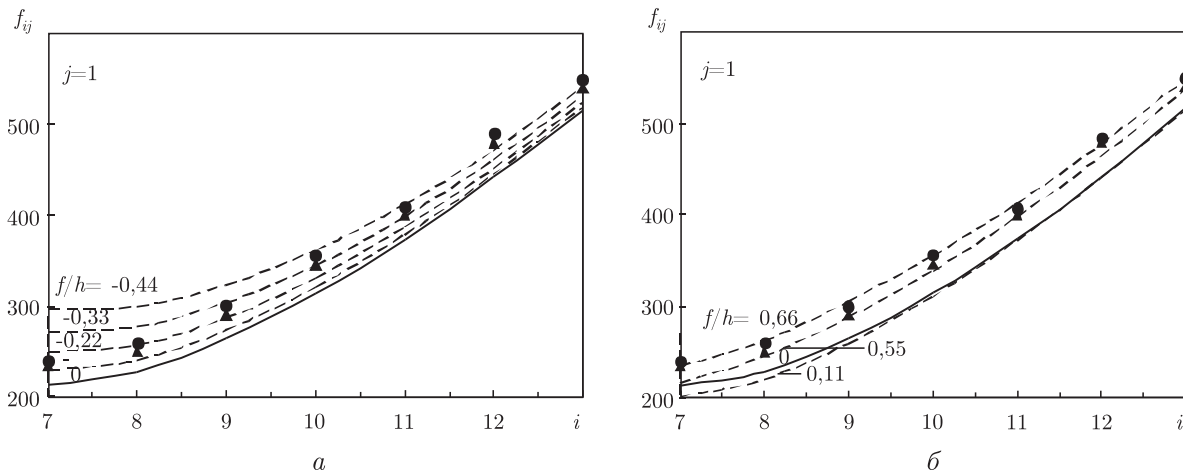


Рис. 3

При наличии выпучин ($z_j \leq 0$): при росте z_j или w_0/h величина ζ тоже растет, причем она становится весьма существенной. Например при $dl = 0,17$ и $|z_j| = 0,02$ величина $\zeta > 1,75$. Эти выводы качественно соответствуют результатам работы [6], где исследовались сферические оболочки.

Следовательно, одиночные локальные вмятины и выпучины могут существенно повышать собственную частоту колебаний. Однако в зоне $0 \leq z_j \leq 0,02$ и $0,51 \leq dl \leq 1$ величина ζ понижается. На рис. 2, б в координатах $f_{cr} = f(w_0/h)$ — зависимость минимальной частоты колебаний от амплитуды одиночного прогиба. Поведение кривых на рис. 2, б аналогично поведению кривых на рис. 2, а.

На рис. 3 даны зависимости $f_{ij} = f(i)$ при $j = 1$ для одиночной выпучины (рис. 3, а) и вмятины (рис. 3, б), причем i — число волн по окружности оболочки; $f_{ij} = \omega/2\pi$ — круговая частота.

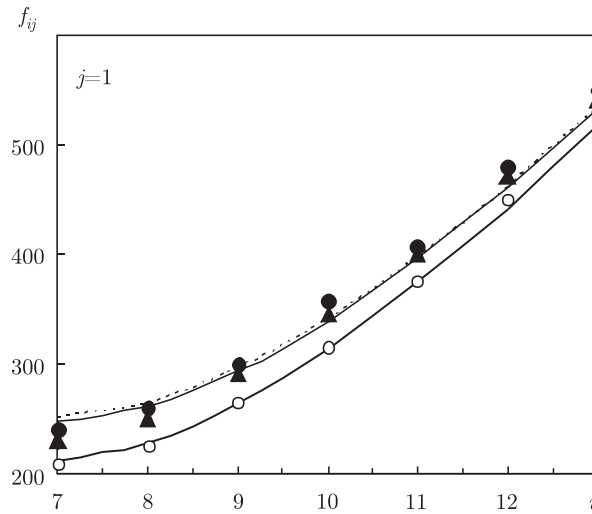


Рис. 4

На рис. 3, а представлены частоты колебаний: для идеальной оболочки (сплошная линия); для оболочек с выпучинами ($dl = 0,17$), у которых растет амплитуда w_0/h от $-0,11$ до $-0,44$ (штриховые линии); для испытанных оболочек [3] (●, ▲ — гладкие оболочки).

На рис. 3, б представлены частоты колебаний: для оболочек с вмятинами ($dl = 0,17$), у которых растет амплитуда w_0/h от $0,11$ до $0,66$ (штриховые кривые); экспериментальные данные (●, ▲) те же, что и на рис. 3, а.

Как следует из рис. 3, рост амплитуды прогибов ведет к росту всех частот колебаний, причем f_{\min} при наличии вмятин может даже уменьшаться при $w_0/h = 0,11$.

Из рис. 3 видно, что все частоты колебаний неидеальных оболочек увеличиваются по сравнению с идеальной оболочкой (сплошная линия) и при этом приближаются к экспериментальным данным [3]. Однако в испытанных оболочках [3], естественно, были начальные несовершенства, причем не в виде одиночных прогибов, а скорее ближе к регулярным, т. е. в виде чередующихся вмятин и выпучин (как на рис. 1). Поэтому на рис. 4 представлены результаты расчетов $f_{ij} = f(i)$ для оболочек с тремя зонами вмятин и выпучин (при $j = 1$).

На рис. 4 показаны: теоретическая кривая для идеальной оболочки, полученная предложенным способом (штриховая кривая); теоретические результаты работы [3] в виде белых кружков (○); прежние экспериментальные результаты [3], которые описаны на рис. 3 (●, ▲).

Кроме того, нанесены еще две теоретические кривые, полученные в работе. Каждая из них соответствует оболочке с тремя прогибами (одинаковой амплитуды $w_0/h = 0,5$) и одинаковыми зонами протяженности ($dl = 0,25$). При этом одна кривая (штриховая) отвечает оболочке, у которой есть одна центральная вмятина $w_0/h = 0,5$ и две примыкающие к ней выпучины. Вторая кривая (тонкая линия) характеризует поведение частот в неидеальной оболочке с выпучиной в центре ($w_0/h = -0,5$) и двумя примыкающими к ней вмятинами. Из рис. 4 следует, что регулярные прогибы подобного типа увеличивают собственные частоты колебаний оболочек и приближают их значения к экспериментальным данным [3].

Таким образом, в работе предложен аналитический метод определения частот свободных колебаний гладких цилиндрических оболочек с локальными осесимметричными прогибами. Проведено сравнение полученных результатов с известными теоретическими решениями и экспериментальными данными для гладких цилиндрических оболочек.

1. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И. Устойчивость и несущая способность подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами // Theoret. Foundations of Civil Engineering. – Polish – Ukrainian Transactions, Warsaw – Dnepropetrovsk, June 2004. – Vol. 2. – P. 629–636.
2. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И., Ситник А. С. Устойчивость и несущая способность подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами и выпучинами // Ibid. – Polish – Ukrainian Transactions, Warsaw – Dnepropetrovsk, June 2005. – **13**. – P. 99–106.
3. Кукарина А. И., Мацнер В. И., Сивак Э. Ф. О влиянии начальных погибей на собственные колебания ребристых цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1982. – **18**, № 4. – С. 58–63.
4. Кильчевський М. О. Курс теоретичної механіки. – Київ: Рад. шк., 1957. – Т 2. – 462 с.
5. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / Кармишин А. В, Ляскавец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. – Москва: Машиностроение, 1975. – 376 с.
6. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Решетарь А. Д. О формах изгибных колебаний сферических оболочек с начальными неправильностями // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 12. – С. 30–38.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 08.05.2007

УДК 539.3

© 2007

Е. Ю. Коханенко

Устойчивость пластины с трещиной при неоднородном докритическом состоянии

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

The plane problem of stability of a rectangular plate with central crack under uniaxial compressing of end-walls is considered. Conditions of fixing the end-walls correspond, in integral form, to conditions of a hinge unit. The approximate solution of the problems of elasticity and stability are obtained by the variation-difference method. The example of calculation of critical parameters is given.

В [1–3] рассмотрена задача устойчивости шарнирно закрепленной пластины с центральной трещиной при одноосном сжатии, обеспечивающем однородное начальное состояние в теле пластины. В качестве математической модели использованы уравнения трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [4]. Ниже рассматривается аналогичная задача для случая неоднородного докритического состояния.

Прямоугольная изотропная пластина достаточно протяженная в направлении оси Ox_3 и имеет в этом направлении сквозную трещину шириной t . В направлении трещины пластина сжимается нагрузкой интенсивности $\overset{\circ}{p}_{22}(x_1) = \overset{\circ}{p}_{22}$, обеспечивающей в теле пластины состояние плоской деформации в плоскости $x_3 = \text{const}$, где пластина имеет размеры $2l_1 \cdot 2l_2$. К решению задачи устойчивости применяются уравнения (ТЛТУДТ) и используется второй вариант теории. Задача формулируется в безразмерной форме. При этом размеры пластины нормированы ее длиной l_2 , а напряжения и поверхностная нагрузка отнесены к величине