

Н. В. Никитина

Случайные движения бистабильного осциллятора с периодическим воздействием

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

The existence of random oscillations of a bistable oscillator under periodic perturbations is established.

Речь идет о двухчастотных системах, в которых существуют неустойчивые квазипериодические колебания, переходящие из одной области в другую. Появление блужданий из одной области в другую связано с седловыми решениями на траектории. Водораздел двух видов движений (устойчивых и блужданий в области случайных движений) может определяться величиной энергии E . Данная работа является продолжением [1], где приведены три области периодических решений. При периодическом воздействии область существования замкнутой кривой может не быть областью устойчивых колебательных движений. Связано это с устойчивостью особой точки. Рассматриваемый пример имеет три особые точки. Устойчивая квазипериодическая кривая наматывается вокруг трех точек, которые в целом в силу симметрии ведут себя как одна устойчивая. При периодическом воздействии траектория одной из кольцевых областей за период иногда успевает проскочить мимо седла. Так возникает блуждание по двум областям. Если энергии мало, то блуждание продолжается на бесконечности. Новизна результата состоит в выделении устойчивых движений и указании качества энергии, которое соответствует этим движениям.

1. Предварительные сведения. Запишем двумерную систему первого порядка в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x), \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x). \quad (1)$$

Изложим геометрический принцип симметрии [2], на основе которого можно идентифицировать замыкание на плоскости траектории системы (1).

1. В системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_1(x)$ относительно x_1 и нечетности функции $F_2(x)$ относительно x_1 , т. е.

$$\begin{aligned} F_1(-x_1, x_2) &= F_1(x_1, x_2), \\ F_2(-x_1, x_2) &= -F_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство основано на том, что на плоскости Ox_1x_2 ось Ox_2 является осью симметрии, и всякая интегральная кривая слева от оси x_2 является зеркальным отображением кривой справа.

На основании принципа симметрии также можно заключить, что в системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_2(x)$ относительно x_2 и нечетности $F_1(x)$ относительно x_2 , т. е.

$$\begin{aligned} F_1(x_1, -x_2) &= -F_1(x_1, x_2), \\ F_2(x_1, -x_2) &= F_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ось Ox_1 является осью симметрии.

На основе принципа симметрии можно обнаружить симметрию траектории относительно седла, однако траектория замыкается вокруг седла в случае, когда имеет место еще два центра, симметрично расположенных относительно седла. В работе [1] приведены три области периодических решений бистабильного осциллятора.

Приведем обобщение принципа симметрии для двухчастотной системы. Колебательное движение двух связанных нелинейных осцилляторов описывается векторным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (4)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^4$ — вектор состояния системы в момент $t \in \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Пусть система

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} \quad (5)$$

является линейным приближением системы (4). Система (5) имеет начало координат типа “центр”, т.е. собственные значения матрицы A простые, чисто мнимые: $\lambda_j, \bar{\lambda}_j = \pm i\omega_j$ ($j = 1, 2$). В работе [2] принцип геометрической симметрии применен для идентификации центра в двумерной нелинейной системе. Основываясь на геометрической симметрии, укажем достаточные условия существования устойчивого квазипериодического движения в системе (4).

2. В системе (4) существуют квазипериодические движения, если выполняются условия четности функций F_k ($k = 2, 4$) относительно x_2, x_4 и нечетности функций F_j ($j = 1, 3$) относительно x_2, x_4 , т.е.

$$\begin{aligned} F_k(x_1, -x_2, x_3, -x_4) &= F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) & (k = 2, 4), \\ F_j(x_1, -x_2, x_3, -x_4) &= -F_j(x_1, x_2, x_3, x_4) & (j = 1, 3). \end{aligned} \quad (6)$$

Подобные условия можно привести при смене осей.

В системе (4) существуют квазипериодические движения, если выполняются условия четности функций F_k ($k = 1, 3$) относительно x_1, x_3 и нечетности функций F_j ($j = 2, 4$) относительно x_1, x_3 , т.е.

$$\begin{aligned} F_k(-x_1, x_2, -x_3, x_4) &= F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) & (k = 1, 3), \\ F_j(-x_1, x_2, -x_3, x_4) &= -F_j(x_1, x_2, x_3, x_4) & (j = 2, 4). \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью симметрии 2 можно установить существование квазипериодических колебаний. Квазипериодические траектории могут быть образованы круговыми кривыми с ограниченными седловыми решениями. В этом случае на траектории имеет место нейтральное притяжение. Седловые решения могут вносить лишь локальную неустойчивость.

Рассмотрим пример с несколькими особыми точками, в том числе седло.

Пример. Рассмотрим уравнения движения бистабильного осциллятора с периодическим воздействием. Запишем уравнения движения относительно точек O, O_1, O_2

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\mu}{m}x_1 - \frac{\mu\sigma}{m}x_1^3 + x_3 \cos t; \quad (8)$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = -\frac{\mu}{m}u_1(2 + 3\sqrt{\sigma}u_1 + \sigma u_1^2) + u_3 \cos t; \quad (9)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\frac{\mu}{m}v_1(2 - 3\sqrt{\sigma}v_1 + \sigma v_1^2) + v_{30} \cos t, \quad (10)$$

где x_{30}, u_{30}, v_{30} — постоянные величины. Систему (8) можно представить в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\mu}{m}x_1 - \frac{\mu\sigma}{m}x_1^3 + x_3, \quad (11)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = -x_3 \quad (12)$$

при следующих начальных условиях: $t = 0; x_3 = x_{30}; x_4 = 0$. Аналогично можно записать системы

$$\frac{du_1}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = -\frac{\mu}{m}u_1(2 + 3\sqrt{\sigma}u_1 + \sigma u_1^2) + u_3, \quad (13)$$

$$\frac{du_3}{dt} = u_4, \quad \frac{du_4}{dt} = -u_3; \quad (14)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\frac{\mu}{m}v_1(2 - 3\sqrt{\sigma}v_1 + \sigma v_1^2) + v_3, \quad (15)$$

$$\frac{dv_3}{dt} = v_4, \quad \frac{dv_4}{dt} = -v_3. \quad (16)$$

В системе (11) выполняется условие четности функций F_2, F_4 относительно x_2, x_4 и условие нечетности функций F_1, F_3 относительно x_2, x_4 . При смене осей выполняется условие четности функций F_1, F_3 относительно x_1, x_3 и условие нечетности функций F_2, F_4 относительно x_1, x_3 . Это указывает на то, что в системе (11) существует область устойчивых двухчастотных колебаний. В системе (12) выполняется условие четности функций F_2, F_4 относительно u_2, u_4 и условие нечетности функций F_1, F_3 относительно u_2, u_4 . Тот же вывод можно сделать для системы (13). В системах (12), (13) существуют области устойчивых двухчастотных колебаний. Возможно, что это та же область, что и в системе (11). Полученный результат требует дополнительного исследования.

В работах [3, 4] установлено существование замкнутой траектории относительно точек O, O_1, O_2 . Различается решение, отделяющее многообразия периодических движений относительно точек O_1, O_2 от многообразий относительно седла. Различаются траектории, замкнутые относительно седла.

В работе [1] рассмотрены уравнения бистабильного осциллятора

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\mu}{m}x_1 - \frac{\mu\sigma}{m}x_1^3. \quad (17)$$

Построены замкнутые кривые (решения) для каждой области и кривые, разделяющие эти области. Многообразия траекторий, замкнутых относительно точек O_1, O_2 , образуют область внутри колец сепаратрисы. На каждой траектории имеют место седловые решения. Многообразия траекторий, замкнутых относительно O, O_1, O_2 , заполняют внешнюю область по отношению к сепаратрисе. На каждой траектории также имеют место седловые решения. Притяжение каждой замкнутой траектории нейтрально. На рис. 1 видно, что внутри сепаратрисы находится еще одна разделяющая кривая, которая показывает, что точки O_1, O_2 — седло-центры [1]. При начальных условиях: при $t = 0; x_1 = x_{10}; x_2 = 0$ энергия системы (14) $E = x_2^2/2 + U(x_1)$ определится начальным значением потенциальной энергии $E = U = -\mu/m(x_1^2/2 - \sigma x_1^4/4)$. Для внешней области E определяется как

$$E = U(x_{10}) > 0 \quad (18)$$

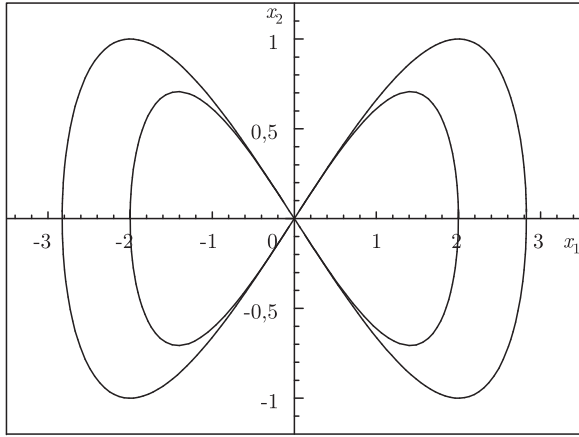


Рис. 1

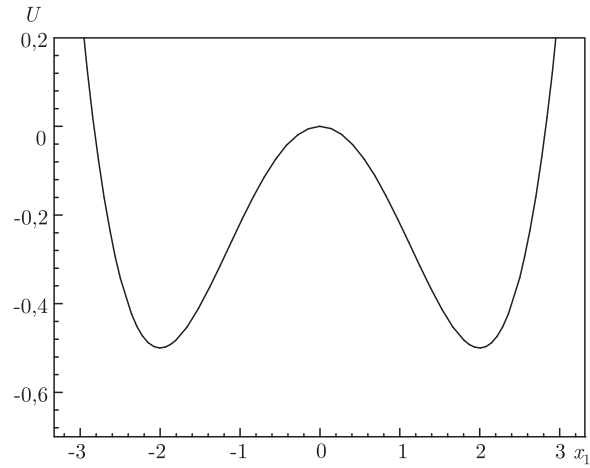


Рис. 2

для внутренней $E = U(x_{10}) < 0$, при этом уровень энергии на сепаратрисе равен нулю. На рис. 2 приведен график зависимости $U(x_1)$.

2. Случайные движения при периодическом возмущении. Рассматривается система с тремя областями периодических многообразий. Нейтральное притяжение и устойчивость особой точки являются достаточными качествами для орбитальной устойчивости кривых. Точка седло-центр несимметрична и неустойчива. Для области, расположенной снаружи сепаратрисы, точки O_1, O, O_2 образуют симметрию, так что воспринимаются как одна симметричная точка. Нахождение областей устойчивых двухчастотных колебаний бистабильного осциллятора с периодическим возмущением сводится к следующим задачам.

Задача 1. Исследуется устойчивость периодически возмущенных колебаний во внешней по отношению к сепаратрисе области (см. рис. 1). Покажем, что эта область симметрична относительно осей Ox_1, Ox_2 и содержит двухчастотные орбитально устойчивые движения.

Введем в рассмотрение малое отклонение δx_j от решения $\bar{x}_j(t)$ ($j = 1, 2$) системы (11). Обозначим $\delta x_j = x_j(t) - \bar{x}_j(t)$. Линеаризованная система в вариациях имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x_1}{dt} &= \delta x_2, & \frac{d\delta x_2}{dt} &= M(\bar{x}_1)\delta x_1 + \delta x_3, \\ \frac{d\delta x_3}{dt} &= \delta x_4, & \frac{d\delta x_4}{dt} &= -\delta x_3, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$M(\bar{x}_1) = \frac{\mu}{m}(1 - 3\sigma\bar{x}_1^2).$$

Характеристическое уравнение системы (15) имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i; \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{M(\bar{x}_1)}. \quad (20)$$

В области

$$-\sqrt{(3\sigma)^{-1}} > x_1 > \sqrt{(3\sigma)^{-1}} \quad (21)$$

корни (16) мнимые. В области

$$-\sqrt{(3\sigma)^{-1}} < x_1 < \sqrt{(3\sigma)^{-1}} \quad (22)$$

среди корней (16) имеет место пара седловых. Покажем, что в области (17) мнимые корни (16) не кратные. Составим характеристическую матрицу системы (15).

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -M & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

При помощи элементарных преобразований приведем характеристическую матрицу к нормальной диагональной форме

$$\begin{pmatrix} (\lambda^2 + 1)(M - \lambda^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M + \lambda^2)(\lambda^2 + 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Мнимым корням отвечают простые элементарные делители. В области (17) корни (16) не кратные. Колебательное движения образует устойчивые кольца траектории вследствие симметрии относительно двух осей. Траектория содержит ограниченные седловые решения в области (18), симметричные относительно двух осей. В целом траектория устойчива, обладает нейтральным притяжением. При движении в режиме синфазных колебаний траектория перемещается вдоль оси Ox_2 , расширяясь симметрично. Это связано с седловыми ограниченными решениями. Движение во внешней области по отношению сепаратрисы соответствует условно квазипериодическому движению (рис. 3). Особенностью этого движения является наличие пары седловых ограниченных решений в области (18).

Задача 2. Исследуется устойчивость квазипериодических движений внутри колец сепаратрисы. Покажем, что квазипериодические колебания внутри колец сепаратрисы неустойчивые.

Запишем систему (11) в псевдолинейном виде

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\mu}{m}(1 - \sigma x_1^2)x_1 + x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = -x_3.$$

Из корней псевдолинейной системы $\lambda_{1,2} = \pm i$; $\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\mu/m(1 - \sigma x_1^2)}$ в области

$$-\sqrt{(\sigma)^{-1}} > x_1 > \sqrt{(\sigma)^{-1}} \quad (23)$$

имеют седловой характер. Область (19) подходит к точкам O_1, O_2 . Это вызывает неустойчивость квазипериодических кривых. Любое сколь угодно малое возмущение в окрестности седло-центров O_1, O_2 порождает сильное перемещение вдоль оси Ox_1 .

Введем в рассмотрение малое отклонение δu_j от решения $\bar{u}_j(t)$ ($j = 1, 2$) системы (12). Обозначим $\delta u_j = u_j(t) - \bar{u}_j(t)$. Линеаризованная система в вариациях имеет вид

$$\frac{d\delta u_1}{dt} = \delta u_2, \quad \frac{d\delta u_2}{dt} = -M(\bar{u}_1)\delta u_1 + \delta u_3, \quad (24)$$

$$\frac{d\delta u_3}{dt} = \delta u_4, \quad \frac{d\delta u_4}{dt} = -\delta u_3, \quad (25)$$

где $M(\bar{u}_1) = \mu/m(2 + 6\sqrt{\sigma}\bar{u}_1 + 3\sigma\bar{u}_1^2)$.

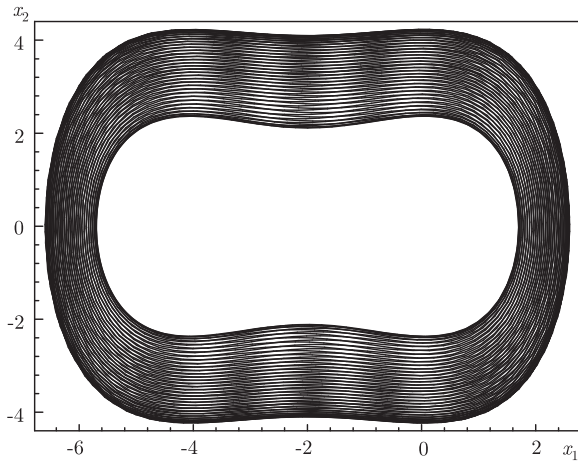


Рис. 3

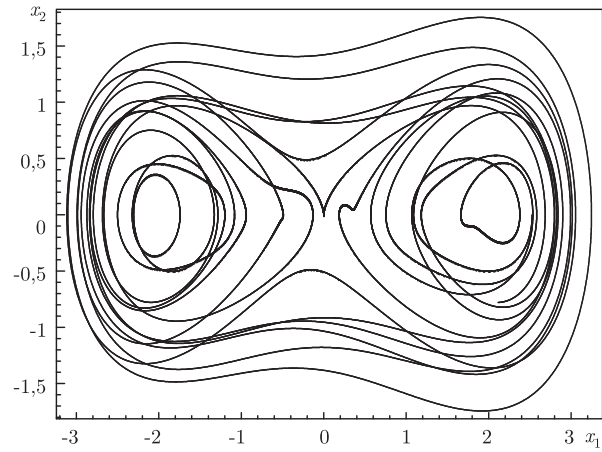


Рис. 4

Характеристическое уравнение системы (20)

$$\lambda^4 + \lambda^2(1 + M(\bar{u}_1)) + M(\bar{u}_1) = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i; \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{M(\bar{u}_1)}.$$

Корни $\lambda_{3,4}$ при $u_1 < 0$ становятся мнимыми. При режиме синфазных колебаний внутри правого кольца сепаратрисы траектория сильно перемещается влево вдоль оси Ou_1 . Это вызвано неустойчивостью траектории из-за неустойчивости особой точки седло-центра. Так как внутренняя область разделяется седлом O , то неустойчивость порождает перемещение траектории из правого кольца сепаратрисы в левое и наоборот. Пусть количество энергии недостаточно для достижения внешней области по отношению сепаратрисы ($E < 0$). Тогда траектория блуждает из одного кольца в другое. Движение продолжается бесконечно. Причиной неустойчивости является попадание траектории в окрестность седла. Так как точки O_1, O_2 седло-центры, то каждая траектория из многообразия круговых траекторий неустойчива. Периодические и седловые решения на траектории создают нейтральное притяжение в целом. Седловые решения ограничены. Вследствие неустойчивости особой точки траектория орбитально неустойчива (рис. 4). При повышении энергии траектория стремится занять внешнюю область по отношению к сепаратрисе. В этом случае устанавливается устойчивый режим колебаний, описанный в первой задаче.

3. Обсуждение результатов. Задача качественного исследования сложных колебаний представляет существенный интерес [5]. Различаются этапы поведения траектории, связанные с величиной энергии. Рассмотрено расширение принципа симметрии для квазипериодических движений. Другой подход к принципу симметрии связан с решениями $\rho^0(\theta), \rho^*(\theta)$ для систем с полиномиальной правой частью. Решения $\rho^0(\theta), \rho^*(\theta)$ введены искусственно для получения важного результата о симметрии и притяжении-отталкивании траектории. Поиск решений этих вопросов представлен в работах [6–8]. В данной статье неустойчивые хаотические колебания отождествляются с бесконечным блужданием траектории. Это возможно при определенном уровне энергии. Существуют орбитально устойчивые

кривые с седловыми решениями на траектории. Орбитально устойчивым траекториям соответствует локальная неустойчивость и симметрия решений и особых точек при нейтральном притяжении круговой траектории в целом. Блуждание из одного кольца сепаратрисы в другую траектории бистабильного осциллятора с периодическим воздействием происходит как бесконечное во времени пребывание в состоянии неустойчивых квазипериодических колебаний за счет низкого уровня энергии (для хаотических движений, например, $E < 0$, либо $E^{**} > E > 0$). Повышение уровня энергии как бы выталкивает траекторию в область устойчивых движений.

1. *Никитина Н. В.* О построении фазового портрета бистабильного осциллятора // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 59–64.
2. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – Москва: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.
3. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* Bistable oscillator theory revisited // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No 4. – P. 489–497.
4. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* On approximate representation of periodic motions in a saddle point // Ibid. – 2002. – **38**, No 9. – P. 1138–1140.
5. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. – Москва: Ин-т компьютерных исследований, 2004. – 416 с.
6. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* Studying the complex oscillations of a star in the field of a galaxy // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 4. – P. 453–461.
7. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* Complex oscillations revisited // Ibid. – 2005. – **41**, No 2. – P. 179–186.
8. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* Complex behavior of a trajectory in single and double systems // Ibid. – No 3. – P. 315–323.

*Институт механіки ім. С. П. Тимошенко
НАН України, Київ*

Поступило в редакцію 13.02.2007

УДК 539.3

© 2007

Л. С. Рожок

Шаруваті порожнисті циліндри з гофрами в поперечному перерізі при дії локального навантаження

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

The influence of a local loading on the stressed state of hollow three-layered cylinders corrugated in the cross section and with transversally isotropic middle layer is investigated on the basis of the method of approximation of functions by discrete Fourier series. Distributions of the fields of displacements and stresses are presented.

У роботі [1] розглянуто задачу про напружений стан ізотропних порожнистих циліндрів з гофрами в поперечному перерізі при дії локального навантаження. В даній роботі проводиться дослідження напруженого стану тришаруватих порожнистих гофрованих циліндрів