УДК 539.375



**А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, М. В. Дудик**

# О боковой зоне предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных упругих сред

*(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)*

*The calculation of an initial pre-fracture zone near the end of a crack in a piecewise homogeneous isotropic elastic body under plane strain by the Wiener–Hopf method is presented. The crack is located at the interface of media. The pre-fracture zone is modeled by the direct line of the normal displacement rupture emerging from the end of the crack. The dependences of the pre-fracture zone length and the slope angle on the load and other parameters of the problem are investigated.*

В условиях плоской деформации рассматривается задача о расчете начальной зоны предразрушения вблизи конца трещины в кусочно-однородном изотропном теле, расположенной на границе раздела двух различных однородных сред с модулями Юнга $E_1$, $E_2$ и коэффициентами Пуассона $\nu_1$, $\nu_2$. Зона предразрушения моделируется исходящей из конца трещины под углом $\alpha$ к границе раздела сред прямой линией разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно заданной постоянной материала $\sigma$. Постоянная $\sigma$ представляет собой среднее по длине нормальное напряжение в зоне предразрушения и должна определяться экспериментально по методике, изложенной в [1].

Поскольку длина $l$ линии разрыва значительно меньше длины $L$ трещины и всех других размеров тела, а напряженно-деформированное состояние исследуется лишь вблизи линии разрыва, в качестве решения соответствующей статической задачи теории упругости будем использовать решение задачи для кусочно-однородной изотропной упругой плоскости, содержащей полубесконечную трещину на прямолинейной границе раздела сред и исходящую из ее конца линию разрыва (рис. 1). На рис. 1 линия разрыва расположена в верхней полуплоскости, так как предполагается, что материал тела с упругими постоянными $E_1$, $\nu_1$ является более хрупким, чем материал второго тела. На бесконечности главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды представляют собой удовлетворяющее условию затухания напряжений асимптотически наибольшее решение аналогичной задачи без линии разрыва. Это решение [2] имеет осциллирующий характер вблизи конца трещины и содержит две произвольные постоянные $K_{\mathrm{I}}$, $K_{\mathrm{II}}$ — коэффициенты интенсивности напряжений, которые характеризуют интенсивность внешнего поля и считаются заданными по условию.

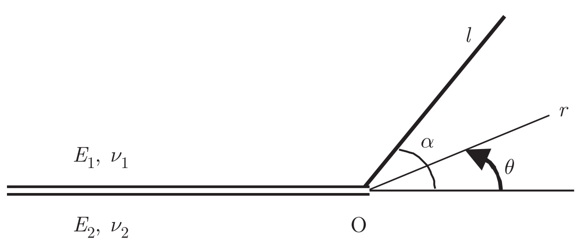


Рис. 1

В [3] в аналогичной постановке в рамках модели с линией разрыва касательного смещения решена задача о расчете начальной зоны предразрушения вблизи конца трещины в кусочно-однородном изотропном упругопластическом теле, расположенной на границе раздела двух различных сред.

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

$$\theta = 0, \qquad \langle\sigma_\theta\rangle = \langle\tau_{r\theta}\rangle = 0, \qquad \langle u_\theta\rangle = \langle u_r\rangle = 0;$$

$$\theta = \alpha, \qquad \langle\sigma_\theta\rangle = \langle\tau_{r\theta}\rangle = 0, \qquad \langle u_r\rangle = 0; \qquad \theta = \pm\pi, \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \tag{1}$$

$$\theta = \alpha, \qquad r < l, \qquad \sigma_\theta = \sigma; \qquad \theta = \alpha, \qquad r > l, \qquad \langle u_\theta\rangle = 0; \tag{2}$$

$$\theta = \alpha, \qquad r \to \infty, \qquad \sigma_\theta = F(\alpha)r^{-\frac{1}{2}+i\omega} + \overline{F(\alpha)}r^{-\frac{1}{2}-i\omega} + o(1/r);$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{e+\chi_1}{1+e\chi_2}, \qquad e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}e_0, \qquad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \qquad \chi_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)};$$

$$F(\alpha) = e'\cdot(K_{\mathrm{II}} - iK_{\mathrm{I}})L^{-i\omega}F_1(\alpha), \qquad e' = \frac{\sqrt{(e+\chi_1)(1+e\chi_2)}}{2\sqrt{2\pi}[(e+\chi_1)^2 - (1+e\chi_2)^2]},$$

$$F_1(\alpha) = -[a_1\sin(\lambda+2)\alpha + a_2\sin\lambda\alpha + a_3\cos(\lambda+2)\alpha + a_4\cos\lambda\alpha]_{\lambda=-\frac{1}{2}+i\omega},$$

$$a_1 = \frac{e+\chi_1}{2} - 1 - e\chi_2 + \left(e + \chi_1 - \frac{1+e\chi_2}{2}\right)\operatorname{ch}2\pi\omega + i\omega[e+\chi_1 - (1+e\chi_2)\operatorname{ch}2\pi\omega],$$

$$a_2 = (3/2 + i\omega)[(1+e\chi_2)\operatorname{ch}2\pi\omega - e - \chi_1],$$

$$a_3 = -\omega(1+e\chi_2)\operatorname{sh}2\pi\omega - i(e+\chi_1-(1+e\chi_2)/2)\operatorname{sh}2\pi\omega,$$

$$a_4 = (\omega - 3i/2)(1+e\chi_2)\operatorname{sh}2\pi\omega. \tag{3}$$

Здесь $\langle f\rangle$ — скачок величины $f$; $\overline{W}$ — число, комплексно сопряженное $W$.

Вблизи конца линии разрыва в силу общих положений о поведении напряжений в окрестностях угловых точек упругих тел [4] реализуется асимптотика, представляющая собой удовлетворяющее условию непрерывности смещений асимптотически наибольшее решение однородной задачи теории упругости для плоскости, содержащей полубесконечную прямую линию разрыва. В частности, справедливы следующие асимптотики:

$$\theta = \alpha, \qquad r \to l+0, \qquad \sigma_\theta \sim \frac{K}{\sqrt{2\pi(r-l)}};$$

$$\theta = \alpha, \qquad r \to l-0, \qquad \left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1}\frac{K}{\sqrt{2\pi(l-r)}}$$

($K$ — определяемый в ходе решения коэффициент интенсивности напряжений в конце линии разрыва).

Решение сформулированной краевой задачи теории упругости представим в виде суммы решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что в (2) вместо первого условия примем

$$\begin{aligned} &\theta = \alpha, \qquad r < l, \\ &\sigma_\theta = \sigma - F(\alpha)r^{-\frac{1}{2}+i\omega} - \overline{F(\alpha)}r^{-\frac{1}{2}-i\omega}, \end{aligned} \tag{4}$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (3) отсутствуют первые два слагаемых). Вторая задача — аналогичная задача без линии разрыва, решение которой известно, поэтому достаточно найти решение первой задачи.

Применив преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая второе условие (2) и условие (4), приходим к функциональному уравнению Винера–Хопфа первой задачи:

$$\Phi^+(p) + \frac{\sigma}{p+1} + \frac{Z}{p+1/2+i\omega} + \frac{\overline{Z}}{p+1/2-i\omega} = -\mathrm{tg} p\pi \cdot G(p)\Phi^-(p),$$

$$\Phi^+(p) = \int\limits_1^\infty \sigma_\theta(\rho l, \alpha)\rho^p d\rho, \qquad \Phi^-(\mathrm{p}) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}\int\limits_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle\bigg|_{\substack{r=\rho l\\ \theta=\alpha}} \rho^p d\rho,$$

$$Z = -F(\alpha) l^{-\frac{1}{2}+i\omega}, \qquad G(p) = -\frac{D_1(p)\cos p\pi}{D_0(p)\sin^2 p\pi},$$

$$D_0(p) = 2(e+\chi_1)(1+e\chi_2)\cos 2p\pi + (e+\chi_1)^2 + (1+e\chi_2)^2,$$

$$D_1(p) = (1+e\chi_2)^2\Delta_1(p) - 2(1-e)(1+e\chi_2)\Delta_2(p) + 2(e+\chi_1)(1+e\chi_2)\Delta_3(p) -$$
$$- 2(1-e)(e+\chi_1)\Delta_4(p) - (e+\chi_1)^2\Delta_5(p),$$

$$\Delta_1(p) = p\sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) + 2p^2\sin^2\alpha\cos p(\pi-2\alpha) - 2\sin p\alpha \sin p(\pi-\alpha),$$

$$\Delta_2(p) = p^2\sin^2\alpha\cos p(3\pi - 2\alpha) + p\sin 2\alpha\cos p(2\pi-\alpha)\sin p(\pi-\alpha) + \cos p\pi\sin^2 p(\pi-\alpha),$$

$$\Delta_3(p) = p^2\sin^2\alpha\cos p(\pi+2\alpha) - p\sin 2\alpha \sin p\alpha\cos p(\pi+\alpha) -$$
$$- \sin p(\pi-\alpha)[\sin p(2\pi+\alpha) - \sin p\pi\cos p(\pi-\alpha)],$$

$$\Delta_4(p) = p^2\sin^2\alpha\cos p(\pi-2\alpha) + p\sin 2\alpha\cos p\alpha \sin p(\pi-\alpha) + \cos p\pi \sin^2 p(\pi-\alpha),$$

$$\Delta_5(p) = \sin p\pi[\sin 2p(\pi-\alpha) + p\sin 2\alpha];$$

$-\delta_1 < \mathrm{Re}\, p < \delta_2$, $\delta_1$ и $\delta_2$ — достаточно малые положительные числа.

Из решения этого функционального уравнения находим коэффициент $K$. Приравнивая его к нулю, приходим к уравнению, служащему для определения длины зоны предразрушения:

$$\frac{\widetilde{\sigma}\sin(\omega\ln x + \psi + \xi + \varphi)}{\sqrt{x}} = C,$$

$$x = \frac{l}{L}, \qquad \psi = \arg(F_1(\alpha)), \quad \xi = \arg\left(\frac{K^+(-1/2-i\omega)}{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)}\right), \quad \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{K_{\mathrm{II}}}{K_I},$$

$$C = \frac{K^+(-1)}{2e'G^+(-1)|F_1(\alpha)|}\left|\frac{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)}{K^+(-1/2-i\omega)}\right|, \qquad \widetilde{\sigma} = \frac{\sqrt{K_I^2 + K_{\mathrm{II}}^2}}{\sigma\sqrt{L}};$$

$$G^+(p) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right] \qquad (\mathrm{Re}\, p < 0), \qquad K^+(p) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1/2-p)} \tag{5}$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция).

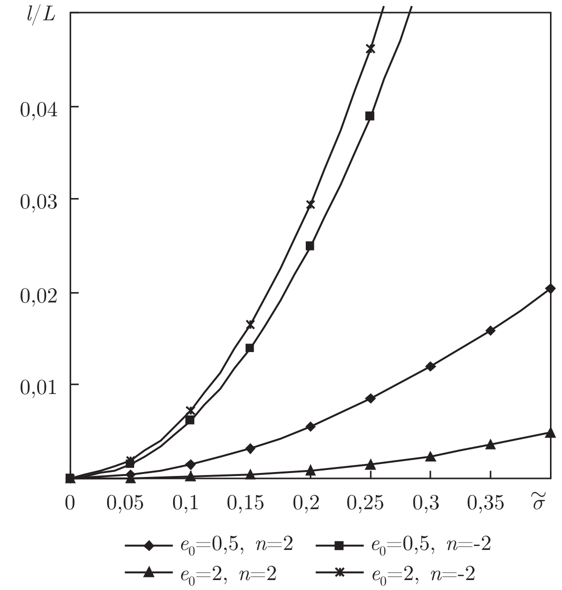


Рис. 2.

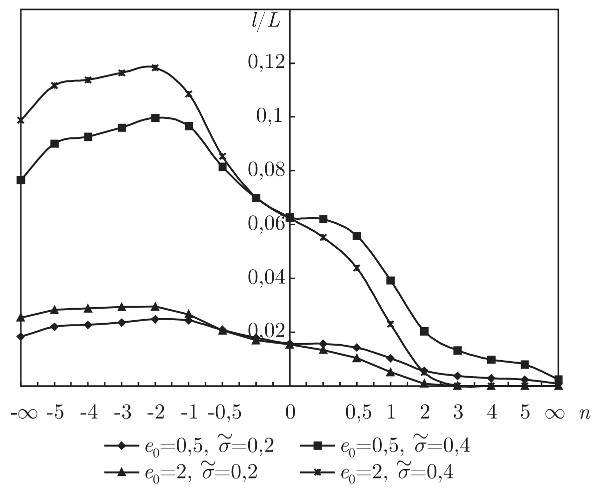


Рис. 3.

Наибольший корень полученного уравнения определяет длину линии разрыва при заданных посредством безразмерного параметра $\widetilde{\sigma}$ внешней нагрузке, не зависящем от внешней нагрузки отношении $n = K_{\mathrm{II}}/K_{\mathrm{I}}$, угле $\alpha$ и упругих характеристиках сред. Для определения угла между линией разрыва и границей раздела сред используется условие максимума длины $l(\alpha)$ линии разрыва.

На рис. 2 представлен график зависимости длины линии разрыва от нагрузки $\widetilde{\sigma}$. Значения коэффициентов Пуассона при расчетах принимались равными $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}333$; более детальный анализ показывает, что их изменение не влияет на качественные выводы, сформулированные ниже. Как и следовало ожидать, длина линии разрыва возрастает с увеличением модуля нагрузки. Если $e_0$ увеличивается, то при $n > 0$ длина линии разрыва уменьшается, а при $n \leqslant 0$ она увеличивается.

Угол наклона линии разрыва слабо зависит от модуля нагрузки. При этом, с увеличением модуля нагрузки угол $\alpha$ уменьшается, если $e_0 < 1$, и увеличивается, если $e_0 > 1$. С увеличением $e_0$ угол наклона уменьшается. Отдельные значения угла при различных параметрах задачи приведены в табл. 1.

Зависимость $l(n)$ при заданных $e_0$ и $\widetilde{\sigma}$ представлена на рис. 3. Значения $l$ достаточно велики при отрицательных $n$, причем при $n$, близких к $-2$, функция $l(n)$ принимает наибольшее значение. При положительных $n$ функция $l(n)$ убывает и стремится к нулю при $n \to \infty$. Угол $\alpha$ уменьшается с увеличением $n$ и, начиная с некоторого $n > 0$, становится

*Таблица 1*

| $e_0$ | $\widetilde{\sigma}$ | $\alpha^0$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $n = -\infty$ | $n = -2$ | $n = -1$ | $n = -0{,}5$ | $n = 0$ | $n = 0{,}5$ |
| 0,5 | 0,2 | 76 | 66 | 57 | 45 | 10 | 0 |
| | 0,4 | 75 | 65 | 56 | 43 | 6 | 0 |
| 2 | 0,2 | 69 | 60 | 51 | 36 | 0 | 0 |
| | 0,4 | 70 | 61 | 52 | 38 | 1 | 0 |

и остается равным нулю. Таким образом, при $n > 0$ зона предразрушения в конце трещины расположена в области, прилегающей к границе раздела сред.

1. *Каминский А. А., Гаврилов Д. А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
2. *Кортен Х. Т.* Механика разрушения композитов. Разрушение. Т. 7, ч. 1. – Москва: Мир, 1976. – С. 367–471.
3. *Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A.* The calculation of side prefracture zone at the end of the crack on the interface of different media // Intern. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No 2. – P. 14–23.
4. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко*
*НАН Украины, Киев*
*Уманский государственный*
*педагогический университет*

*Поступило в редакцию 12.05.2006*

УДК 629.7.054



**В. М. Мельник**

# Хвильові процеси в підвісі гіроскопа з довільним окресленням лінії меридіана поплавця

*(Представлено академіком НАН України В. М. Кошляковим)*

*The theory of the elastic interaction of the suspension of a gyroscope with an external wave perturbation under an arbitrary geometry of the meridian line form is constructed. The ways to compensate this influence with passive methods are presented.*

Реалізація ідеї використання рідинностатичного підвісу в інерціальних навігаційних системах і пілотажному обладнанні [1, 2] дозволила значно зменшити похибки гіроскопічних приладів, практично усунувши сухе тертя на вихідній осі. Між іншим, вирішені інші питання поліпшення динамічних властивостей — ударо- та віброcтійкість, бажаний коефіцієнт демпфірування в інтегруючому гіроскопі тощо. Нарешті стало можливим використання двостепеневих гіроскопів як чутливих елементів високоточних гіростабілізованих платформ.

Стримкий розвиток ракетно-космічної техніки та досягнення практичної космонавтики змусили, проте, істотно переглянути наявні відомості щодо відповідності паспортних характеристик поплавкових гіроскопів діючим реаліям за натурних умов [3, 4]. Мова йдеться про вплив на прилади інерціальної навігації акустичного випромінювання з боку реактивних двигунів.

Відомо, що в акустичні коливання трансформується близько $10^{-4}$ потужності рушійних установок. Наприклад, для одного літака стратегічної бомбардувальної авіації, а також літака тактичної і палубної авіації вона становить $1 \ldots 4$ та $0{,}8 \ldots 1{,}6$ кВт відповідно. Рівень акустичного тиску біля реактивного струменя РН може сягати 180 дБ і вище. Природно,