Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2007

НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

УДК 550.8

Член-корреспондент НАН Украины **Е. Г. Булах**

О методе сеток при решении обратных задач гравиметрии

The problem is reduced to solving the Fredholm integral equation. It is replaced by the system of linear equations and then by a specially constructed functional. Its minimization allows one to specify the position of bodies and their excessive density.

Идея метода сеток для решения обратных задач гравиметрии была изложена давно. Полагаю, она принадлежит А. А. Юнькову, который поставил эту задачу перед автором настоящей публикации в 1950 г.

Численная реализация метода была связана с большими трудностями. В практике вычислительного эксперимента еще не было компьютерной техники, все расчеты могли быть выполнены только на механических арифмометрах [1, 2].

В настоящее время имеется достаточная база вычислительной техники, следовательно можно вернуться к этому вопросу и по–новому рассмотреть его. Толчок к данному направлению дали работы В. Н. Страхова [3, 4 и др.].

1. Постановка задачи. Выберем систему координат. Ее начало размещено в точке на дневной поверхности. Ось аппликат направлена вертикально вниз, если координатная плоскость XOY, или $\xi o\eta$, будет горизонтальной. Она может совпадать с дневной поверхностью, если последняя — горизонтальная плоскость. Здесь и далее введем такое правило: точка расположена вне гравитирующих масс, тогда запишем $M(x,y,z)$; точка размещается внутри этих масс — $M(\xi,\eta,\zeta)$.

Пусть в точках дневной поверхности известно поле аномалии силы тяжести. Это поле может быть аппроксимировано аналитической функцией, тогда исследователь имеет возможность построить некоторую совокупность аномальных полей:

$$\Delta gn(x_i,y_i,z_i) \to \{\Delta gn(x_i,y_i);\, \delta\Delta gn(x_i,y_i);\, V_{zz}(x_i,y_i);\, V_{zzz}(x_i,y_i)\}, \quad i=1,2,\ldots,n. \quad (1)$$

Здесь записано, что исходное поле аномалии силы тяжести может быть приведено к точкам горизонтальной плоскости $z=0$. Дополнительно введем поле вариации аномалии силы тяжести относительно этого поля в фиксированной точке. Исходное поле продифференцировано и получены вторая или третья производные гравитационного потенциала.

Будем решать задачу для случая, когда из совокупности функции (1) взято начальное исходное поле аномалии силы тяжести. Примем гипотезу о том, что массы с избыточной плотностью $\sigma = \sigma(\xi, \eta, \zeta)$ размещены внутри некоторой области D. Запишем такую зависимость:

$$\Delta gn(x, y, z) = k \iiint\limits_D \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} d\tau. \tag{2}$$

В этом выражении $d\tau = d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$ — элемент объема гравитирующих масс.

Обратимся к формуле (2), левая часть которой задана и определена в фиксированных точках вне области интегрирования. Область интегрирования еще не определена и подлежит определению. Под знаком интеграла записана искомая функция $\sigma = \sigma(\xi, \eta, \zeta)$. Определено только ядро интегрального уравнения (2). В такой постановке задача не имеет решения. Необходимо наложить некоторые ограничения на искомые величины. Обратимся к аппроксимационным построениям. Искомую функцию $\sigma = \sigma(\xi, \eta, \zeta)$ представим в виде ступенчатой. Для этого область интегрирования D должна быть разделена на элементы $\{d_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Внутри каждого элемента искомая функция не меняется

$$\sigma(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = C_j = \text{const}; \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.1}$$

Таким образом нами аппроксимирована и область интегрирования, и искомая функция.

Пусть исходная функция — левая часть уравнения (2) — известна в n точках. Перепишем зависимость (2):

$$k \sum_{j=1}^{m} \sigma_j \iiint\limits_{d_j} \frac{(\zeta - z_j)\, d\tau}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 + (\zeta - z_i)^2]^{3/2}} = \Delta gn(i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Области интегрирования хорошо известны. Последнее соотношение запишем так:

$$\sum_{j=1}^{m} \sigma_j T_{ij} = \Delta gn(i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Интегральное уравнение (2) сведено к системе линейных уравнений. Если $n > m$, то равенство (3.1) — переопределенная система. Метод наименьших квадратов может дать решение поставленной задачи.

Однако хорошо известно, что это не такая простая задача. В 1958 г. она решалась А. А. Юньковым, Е. Г. Булахом [1, 2]. Определитель системы нормальных уравнений зависит от способа разбиения области интегрирования и может быть меньше единицы. Тогда элементы обратной матрицы становятся достаточно большими числами. Даже небольшие погрешности правой части системы (3.1) искажают результативную часть. Здесь следует обратиться к работам В. Н. Страхова [4 и др.] и это дает надежду на удовлетворительное решение задачи. Пока еще программное решение такой задачи только отлаживается.

Пусть априорные геологические данные позволяют построить первое приближение для решения системы (3). Запишем такую последовательность:

$$\mathbf{P}^{(0)} = \{\sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)}, \ldots, \sigma_m^{(0)}\}. \tag{4}$$

Систему (3), или (3.1), преобразуем к функционалу

$$F = F(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\Delta gn(i) - \sum_{j=1}^{m}\sigma_j T_{ij}\right]^2. \tag{5}$$

Требуется найти такие составляющие вектора $\mathbf{P}$, которые минимизируют функционал (5).

Обратимся к градиентному методу скорейшего спуска. Его идея была предложена еще Коши (Cauchy 1789–1857). Далее метод совершенствовался и получил значительное развитие в работах Л. В. Канторовича [5–7 и др.].

Для решения задачи выберем геологическую модель. Каждому параметру модели присваивается численное решение. В итерационном процессе последовательность $\mathbf{P}$, запись (4), меняет свои составляющие. Получаем: $\mathbf{P}^{(0)}, \mathbf{P}^{(1)}, \ldots, \mathbf{P}^{(k)}, \ldots, \mathbf{P}^{(*)}$. Этот процесс неизбежно сходится: точка сходимости всецело зависит от начального приближения. Что же касается устойчивости решения, то можно уверенно сказать, что градиентный метод устойчив. Достаточно, как мы полагаем, сослаться на работу [8].

При практическом использовании метода нужно учитывать ряд методических вопросов.

1. Для решения задач качественного анализа целесообразно преобразовать исходное аномальное поле к аналитическому виду. Отсюда несложно получить последовательность функций (1).

2. Качественный анализ исходного поля и все априорные сведения должны дать основание в выборе размещения области D. Внутри этой области распределена искомая функция $\sigma = \sigma(\xi, \eta, \zeta)$.

3. Необходимо удачно найти разбивку области D на элементы $\{d_j\}$. Это разделение должно быть такое, чтобы без особых затруднений был возможен переход от общей записи (3) к вполне определенной системе (3.1).

Теперь обратную задачу можно решить по какому–либо элементу гравитационного поля.

Проверка алгоритма решения задачи на модельных примерах позволяет говорить, что описанный метод найдет применение при решении практических задач.

1. *Юньков А. А., Булах Е. Г.* Возможности использования метода сеток для интерпретации аномалий горизонтального градиента силы тяжести // Тр. ин-та геол. наук АН УССР. Сер. геофиз. – 1958. – № 2. – С. 94–97.
2. *Юньков А. А., Булах Е. Г.* О точности определения плотности аномальных масс методом сеток // Докл. АН УССР. – 1958. – № 11. – С. 1234–1237.
3. *Страхов В. Н.* Алгебраические методы в решении обратных задач гравиметрии (решение обратных задач без решения прямых задач) // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: В 2-х ч. Ч. 2. – Москва: Изд-во ОИФЗ РАН, 2002. – С. 15–18.
4. *Страхов В. Н., Страхов А. В.* О решении систем линейных алгебраических уравнений, возникающих в гравиметрии и магнитометрии // Докл. РАН. – 1999. – **368**, № 4. – С. 545–548; № 5. – С. 683–686.
5. *Канторович Л. В.* Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичных функционалов // Докл. АН СССР. – 1945. – **48**, № 7. – С. 483–487.
6. *Канторович Л. В.* О методе наискорейшего спуска // Там же. – 1947. – **56**, № 3. – С. 233–236.
7. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика. – Москва: УМН, 1948. – **3**, вып. 6(28). – С. 89–185.
8. *Старостенко В. И., Оганесян С. М.* Некорректно поставленные задачи по Адамару и их приближенное решение методом регуляризации по А. Н. Тихонову // Геофиз. журн. – 2001. – **23**, № 6. – С. 3–20.

Институт геофизики им. С. И. Субботина
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 27.09.2006