



УДК 519.85

© 2007

Член-корреспондент НАН України Ю. Г. Стоян, М. В. Злотник

## Размещение кругов и невыпуклых многоугольников с поворотами в прямоугольнике минимальной длины

*A mathematical model of the optimization placement problem of circles and non-convex polygons with rotations into a rectangle of minimal length is built, and its peculiarities are investigated. An algorithm of solving the problem is developed. This algorithm allows one to get an approximation to the global minimum of the problem. A numerical example is given.*

Задачи размещения многоугольников с поворотами рассматривались в [1, 2]. Однако в этих работах осуществляется поиск решений, которые не всегда соответствуют стационарным точкам (локальному минимуму или седловой точке). Кроме того, из-за отсутствия строгой математической модели задачи для ее решения не всегда используются современные эффективные методы локальной и глобальной оптимизации.

Рассматриваемая в данной работе задача имеет следующую постановку. Даны круги  $C_i$  радиусом  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_1$ , невыпуклые многоугольники  $P_i$ , заданные координатами своих вершин,  $i = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2 = m$ , и прямоугольник  $S = \{(x, y) \in R^2, 0 \leq y \leq w, 0 \leq x \leq l\}$ , где  $l$  является переменной. Обозначим параметры размещения через  $u_i = (v_i, \theta_i) = (x_i, y_i, \theta_i)$ , где  $x_i, y_i$  — координаты центра собственной системы координат объекта  $T_i$ , а  $\theta_i$  — угол поворота собственной системы координат объекта относительно неподвижной системы координат. Множество  $T_i$ , для которого задан вектор движения  $u_i = (v_i, \theta_i)$ , обозначим через  $T_i(u_i)$ ,  $T \in \{C, P\}$ , вектор переменных задачи — через  $X = (u, l) \in R^{q+1}$ , где  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ,  $u \in R^q$ ,  $q = 2m_1 + 3m_2$ .

**Задача.** Необходимо определить вектор  $X^*$ , при котором круги  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_1$ , и многоугольники  $P_i$ ,  $i = m_1 + 1, \dots, m$ , размещаются в прямоугольнике  $S$  и его длина  $l$  принимает минимальное значение.

Построим математическую модель этой задачи, воспользовавшись  $\Phi$ -функциями для пары кругов [3], круга и невыпуклого многоугольника, пары невыпуклых многоугольников [4].

Тогда математическая модель задачи имеет вид:

$$\min_{u \in D} F(u, l) = l^*, \quad (1)$$

область допустимых решений  $D$  поставленной задачи описывается следующей системой:

$$D : \begin{cases} \Phi_i^C(u_i) \geq 0, & i = 1, \dots, m_1, \\ \Phi_i^P(u_i) \geq 0, & i = m_1 + 1, \dots, m, \\ \Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j) \geq 0, & i < j = 2, \dots, m_1, \\ \Phi_{ij}^{CP}(u_i, u_j) \geq 0, & i = 1, \dots, m_1, \quad j = m_1 + 1, \dots, m, \\ \Phi_{ij}^{PP}(u_i, u_j) \geq 0, & i < j = m_1 + 2, \dots, m, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\Phi_i^C(u_i) = \min\{x_i - r_i, y_i - r_i, w - y_i - r_i, l - x_i - r_i\},$$

$$\Phi_i^P(u_i) = \min_{v=1, \dots, n_i} \min_{\vartheta=1, \dots, 4} f_{\vartheta iv}(u_i),$$

$$f_{1iv} = x_i + x_{iv} |\cos \theta_i| + y_{iv} |\sin \theta_i|, \quad f_{2iv} = y_i - x_{iv} |\sin \theta_i| + y_{iv} |\cos \theta_i|,$$

$$f_{3iv} = l - (x_i + x_{iv} |\cos \theta_i| + y_{iv} |\sin \theta_i|), \quad f_{4iv} = w - (y_i - x_{iv} |\sin \theta_i| + y_{iv} |\cos \theta_i|),$$

$$\Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - r_i - r_j, \quad \Phi_{ij}^{CP}(u_i, u_j) = \min_{t=1, \dots, n_j} \Phi_{ijt}^{CK}(u_i, u_j),$$

$$\Phi_{ijt}^{CK}(u_i, u_j) = \max_{k=1, \dots, n_{jt}} \max\{\min \psi_k\{(u_i, u_j), \omega_k(u_i, u_j)\}, \chi_k^*(u_i, u_j)\},$$

$$\psi_k(u_i, u_j) = A'_k(x'_j) - B'_k(y'_j) + C'_k,$$

$$C'_k = -A'_k(x_{jtk} + x_{k-1}^*) + B'_k(y_{jtk} + y_{k-1}^*),$$

$$A'_k = y_k^* - y_{k-1}^*, \quad B'_k = x_k^* - x_{k-1}^*,$$

$$v_k^* = (x_k^*, y_k^*) = \frac{r}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}} \begin{pmatrix} A_k \\ -B_k \end{pmatrix}, \quad A_k = y_{jtk+1} - y_{jtk}, \quad B_k = x_{jtk+1} - x_{jtk},$$

$$v_0^* = v_{n_{jt}}^*, \quad C_k = -A_k x_{jtk} + B_k y_{jtk}, \quad \omega_k(u_i, u_j) = (x'_j - x_{jtk})^2 + (y'_j - y_{jtk})^2 - r_i^2,$$

$$\chi_k^*(u_i, u_j) = A_k(x'_j) - B_k(y'_j) + C_k^*, \quad C_k^* = C_k - A_k x_k^* + B_k y_k^*,$$

$$x'_j = (x_i - x_j) \cos \theta_j - (y_i - y_j) \sin \theta_j, \quad y'_j = (x_i - x_j) \sin \theta_j + (y_i - y_j) \cos \theta_j,$$

$$\Phi_{ij}^{PP}(u_i, u_j) = \min_{k=1, \dots, n_i} \min_{t=1, \dots, n_j} \Phi_{ikjt}^{KK}(u_i, u_j),$$

$$\Phi_{ikjt}^{KK}(u_i, u_j) = \max\{\Psi_1(u_i, u_j), \Psi_2(u_i, u_j), \dots, \Psi_\eta(u_i, u_j)\},$$

$$\Psi_\nu(u_i, u_j) = \max\{\omega_{ikjt}^{\nu 1}(u_i, u_j), \omega_{ikjt}^{\nu 2}(u_i, u_j), \dots, \omega_{ikjt}^{\nu d_\nu}(u_i, u_j)\},$$

$$\Omega_{ikjt}^{\nu 1}(u_i, u_j), \Omega_{ikjt}^{\nu 2}(u_i, u_j), \dots, \Omega_{ikjt}^{\nu d_\nu}(u_i, u_j) \} K_\nu(\theta_i, \theta_j) + H_\nu(\theta_i, \theta_j),$$

$$K_\nu(\theta_i, \theta_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } H_\nu(\theta_i, \theta_j) = 0, \\ 0, & \text{если } H_\nu(\theta_i, \theta_j) \neq 0, \end{cases}$$

$$H_\nu(\theta_i, \theta_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta_{i_k j_t}^{\nu-1} \leq |\theta_j - \theta_i| \leq \beta_{i_k j_t}^\nu, \\ \bar{\omega}, & \text{если } \beta_{i_k j_t}^\nu < |\theta_j - \theta_i| \text{ или } |\theta_j - \theta_i| < \beta_{i_k j_t}^{\nu-1}, \end{cases}$$

$$\omega_{i_k j_t}^{\nu r}(u_1, u_2) = (X_{ij}(\theta_i) - x_{i_k r} + x'_{j_t \nu}(\theta_i, \theta_j)) a_{i_k j_t}^{\nu r} - (Y_{ij}(\theta_i) - y_{i_k r} + y'_{j_t \nu}(\theta_i, \theta_j)) b_{i_k j_t}^{\nu r},$$

$$\Omega_{i_k j_t}^{\nu r}(u_1, u_2) = (X_{ji}(\theta_j) - x''_{i_k r}(\theta_i, \theta_j) + x_{j_t \nu}) A_{i_k j_t}^{\nu r} - (Y_{ji}(\theta_j) - y''_{i_r}(\theta_i, \theta_j) + y_{j_t \nu}) B_{ij}^{\nu r},$$

$$X_{ij}(\theta_i) = (x_j - x_i) \cos(\theta_i) - (y_j - y_i) \sin(\theta_i),$$

$$Y_{ij}(\theta_i) = (x_j - x_i) \sin(\theta_i) + (y_j - y_i) \cos(\theta_i),$$

$$x'_{j_t \nu}(\theta_i, \theta_j) = x_{j_t \nu} \cos(\theta_j - \theta_i) + y_{j_t \nu} \sin(\theta_j - \theta_i),$$

$$y'_{j_t \nu}(\theta_i, \theta_j) = -x_{j_t \nu} \sin(\theta_j - \theta_i) + y_{j_t \nu} \cos(\theta_j - \theta_i),$$

$$X_{ji}(\theta_j) = (x_j - x_i) \cos(\theta_j) - (y_j - y_i) \sin(\theta_j),$$

$$Y_{ji}(\theta_j) = (x_j - x_i) \sin(\theta_j) + (y_j - y_i) \cos(\theta_j),$$

$$x''_{i_k r}(\theta_i, \theta_j) = x_{i_k r} \cos(\theta_j - \theta_i) - y_{i_k r} \sin(\theta_j - \theta_i),$$

$$y''_{i_k r}(\theta_i, \theta_j) = x_{i_k r} \sin(\theta_j - \theta_i) - y_{i_k r} \cos(\theta_j - \theta_i),$$

$$a_{i_k j_t}^{\nu r} = y_{i_k r+1} - y_{i_k r}, \quad b_{i_k j_t}^{\nu r} = x_{i_k r+1} - x_{i_k r},$$

$$A_{i_k j_t}^{\nu r} = y_{j_t v+1} - y_{j_t v}, \quad B_{i_k j_t}^{\nu r} = x_{j_t v+1} - x_{j_t v},$$

$\Phi_i^C(u_i)$  —  $\Phi$ -функция круга  $C_i$  и множества  $S^* = cl(R^2 \setminus S)$  [5];  $cl\Gamma$  — операция замыкания [6];  $\Phi_i^P(u_i)$  —  $\Phi$ -функция  $P_i$  и  $S^*$ ;  $\Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j)$  —  $\Phi$ -функция  $C_i$  и  $C_j$ ;  $\Phi_{ij}^{CP}(u_i, u_j)$  —  $\Phi$ -функция  $C_i$  и  $P_j$ ;  $\Phi_{ij}^{CK}(u_i, u_j)$  —  $\Phi$ -функция  $C_i$  и  $K_{jt}$ ;  $\Phi_{ij}^{PP}(u_i, u_j)$  —  $\Phi$ -функция  $P_i$  и  $P_j$ ;  $\Phi_{i_k j_t}^{KK}(u_i, u_j)$  —  $\Phi$ -функция  $K_{i_k}$  и  $K_{jt}$ ;  $P_h = \bigcup_{t=1}^{n_h} K_{h_t}$  [7],  $K_{h_t}$  — выпуклый многоугольник;  $n_h$  — количество выпуклых многоугольников;  $x_{h_t r}, y_{h_t r}$  — координаты вершин многоугольника  $K_{h_t}$ ,  $r = 1, \dots, n_{h_t}$ ,  $n_{h_t}$  — количество вершин  $K_{h_t}$ ,  $h \in \{i, j\}$ .

### Особенности задачи (1)–(2).

1.  $D \subset R^{q+1}$ ,  $D$  определяется системой линейных и нелинейных неравенств, а также является ограниченной, в общем случае несвязной, и каждая компонента связности является многосвязной [6]. Кроме того,  $D$  — область овражного типа.

2. Задача является многоэкстремальной и  $NP$  трудной.

3. Локальные минимумы могут быть нестрогими.

4. Для выполнения  $\Phi_{it}^{CK}(u_i, u_j) \geq 0$ ,  $\Phi_{it}^{PP}(u_i, u_j) \geq 0$  достаточно выполнения одной из систем неравенств, которая входит в соответствующий набор систем неравенств.

### Стратегия решения.

1. В соответствии с модифицированным методом сужающихся окрестностей [8] генерируются последовательности  $\Omega^j = (\Omega_1^j, \Omega_2^j, \dots, \Omega_m^j)$  номеров размещаемых объектов.

2. Для быстрого получения начальных точек  $X$  используется представление геометрических объектов в виде объединения элементарных прямоугольников, а также метод оптимизации по группам переменных [9].

3. Каждая точка  $X$  берется в качестве начальной для поиска локального минимума  $F(X^*)$ .

4. Специальным образом формируется множество  $\Gamma^*$  точек локальных минимумов.

5. В качестве приближения к глобальному минимуму принимается  $X^0 = \arg \min_{X \in \Gamma^*} F(X)$ , где  $\Gamma^*$  — множество точек  $X^*$ .

Для реализации модифицированного метода сужающихся окрестностей каждому кругу  $C_i$  и многоугольнику  $P_i$  ставятся в соответствие пары чисел  $c_i = (r_i, r_i)$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ , и  $p_i = (a_i, b_i)$ ,  $i = m_1 + 1, \dots, m$ , где  $a_i$ ,  $b_i$  — соответственно длина и ширина прямоугольника, описанного вокруг многоугольника  $P_i$ . Затем каждой последовательности  $\Omega^j = (\Omega_1^j, \Omega_2^j, \dots, \Omega_m^j)$ , состоящей из кругов  $C_i$  и многоугольников  $P_i$ , ставится в соответствие вектор  $v^j = \{v_1^j, v_2^j, \dots, v_m^j\} \in R^{2m}$ , где  $v_k^j$  может соответствовать  $c_k$  или  $p_k$ . Если  $c_i \neq c_t$ ,  $p_i \neq p_t$ ,  $c_i \neq p_t$  для  $i \neq t$ , то количество различных векторов  $v^j$  равно  $m!$ . Пусть  $V \subset R^{2m}$  — множество всех векторов  $v^j$ . Оптимизация в соответствии с модифицированным методом сужающихся окрестностей производится на множестве  $V$  в несколько этапов, на каждом из которых формируются окрестности и выбираются их центры [10].

Из всех полученных начальных точек специальным образом формируется множество  $\Gamma \subset D$ . Каждая точка  $X \in \Gamma$  берется в качестве начальной для решения задачи поиска локального минимума. Для поиска локального минимума используется модификация метода возможных направлений [11]. Для того чтобы определить вектор спуска  $Z^k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_{m+1}^k)$ , из точки  $X^k$  на  $k$ -м этапе итеративного процесса  $X^{k+1} = X^k + hZ^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, \eta$ , поиска локального минимума первоначально выделяются  $\varepsilon$ -активные неравенства  $0 \leq \Psi_{k_j}(u^k) \leq \varepsilon$  в точке  $X^k$  из системы (2). При этом в процессе решения задачи значение  $\varepsilon$  уменьшается. Для поиска вектора  $Z^k$  решается следующая задача линейного программирования:

$$\max_{Z^k \in G^k} \lambda,$$

где  $G^k$  определяется системой

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\nabla F(X), Z^k) \geq \lambda, \\ (\nabla \Psi_{k_1}(u^k), Z^k) \geq \lambda, \\ (\nabla \Psi_{k_2}(u^k), Z^k) \geq \lambda, \\ \dots \\ (\nabla \Psi_{k_\mu}(u^k), Z^k) \geq \lambda, \\ -1 \leq z_i^k \leq 1, \quad i = 1, \dots, m + 1. \end{array} \right. \quad (3)$$

Поскольку  $\Phi_{i_k j_t}^{KK}(u_i, u_j)$  является кусочно-гладкой, то при формировании системы (3) для точек, в которых не существует градиент, необходимо определять субградиент [12]  $\nabla_p \Phi_{i_k j_t}^{KK}(u_i, u_j)$  этой функции. Множество таких точек определяется следующим условием:

$$\omega_{i_k j_t}^{\nu, r}(u_1, u_2) = \omega_{i_k j_t}^{\nu+1, r}(u_1, u_2) = \Omega_{i_k j_t}^{\nu, r}(u_1, u_2) = \Omega_{i_k j_t}^{\nu, r+1}(u_1, u_2).$$

В этом случае при формировании системы (3) участвуют четыре неравенства  $\omega_{ikjt}^{\nu,r}(u_1, u_2) \geq 0$ ,  $\omega_{ikjt}^{\nu+1,r}(u_1, u_2) \geq 0$ ,  $\Omega_{ikjt}^{\nu,r}(u_1, u_2) \geq 0$ ,  $\Omega_{ikjt}^{\nu,r+1}(u_1, u_2) \geq 0$ .

Аналогичным образом для  $\Phi_i^P(u_i)$  множество таких точек определяется следующими равенствами:  $f_{\vartheta iv_1}(u_i) = f_{\vartheta iv_2}(u_i) = \dots = f_{\vartheta iv_\zeta}(u_i)$ , где  $v_\xi \in \{1, \dots, n_i\}$ ,  $\xi = 1, \dots, \zeta$ ,  $\vartheta = 1, \dots, 4$ . Однако, при этом, из этих равенств необходимо выбрать только две функции, которые определяют  $\nabla_P \Phi_i^P(u_i)$ , т. е. в формировании системы (3) в этом случае участвуют неравенства  $f_{\vartheta iv_{\rho_1}} \geq 0$  и  $f_{\vartheta iv_{\rho_2}} \geq 0$ , такие что:

$$\text{если } \vartheta \in \{1, 3\}, \text{ то } f_{2iv_{\rho_1}} = \max_{\xi=1, \dots, \zeta} (f_{2iv_\xi}), f_{2iv_{\rho_2}} = \min_{\xi=1, \dots, \zeta} (f_{2iv_\xi});$$

$$\text{если } \vartheta \in \{2, 4\}, \text{ то } f_{1iv_{\rho_1}} = \max_{\xi=1, \dots, \zeta} (f_{1iv_\xi}), f_{1iv_{\rho_2}} = \min_{\xi=1, \dots, \zeta} (f_{1iv_\xi}).$$

Пример. Имеются круги  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , радиусом  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 1,9$ ,  $r_3 = 1,8$ ,  $r_4 = 1,7$ ,  $r_5 = 1,6$ ,  $r_6 = 1,5$ ,  $r_7 = 1,4$ ,  $r_8 = 1,3$ ,  $r_9 = 1,2$ ,  $r_{10} = 1,1$  и многоугольники  $P_i$ ,  $i = 11, \dots, 20$ , координаты вершин, заданные в собственной системе координат, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Координаты вершин многоугольников

$i$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	$x_i$	0,5	0,5	1,5	1,5	0,5	0,5	-0,5	-0,5	-1,5	-1,5	-0,5	-0,5
	$y_i$	1,5	0,5	0,5	-0,5	-0,5	-1,5	-1,5	-0,5	0,5	0,5	0,5	1,5
12	$x_i$	0	2	0	-2	-	-	-	-	-	-	-	-
	$y_i$	1,5	0,5	-3,5	1,5	-	-	-	-	-	-	-	-
13	$x_i$	0,75	2,75	0,75	-4,25	-	-	-	-	-	-	-	-
	$y_i$	0,75	-0,25	-1,25	0,75	-	-	-	-	-	-	-	-
14	$x_i$	0,75	2,75	0,75	-4,25	-	-	-	-	-	-	-	-
	$y_i$	4	-2	-3	1	-	-	-	-	-	-	-	-
15	$x_i$	2,417	3,583	2,583	0,583	-1,42	-2,92	-	-	-	-	-	-
	$y_i$	2,667	2,667	-2,33	-0,33	-0,33	-2,33	-	-	-	-	-	-
16	$x_i$	-2,25	2,75	2,75	0,75	-1,25	-2,75	-	-	-	-	-	-
	$y_i$	2,667	2,667	-2,33	-0,33	-0,33	-2,33	-	-	-	-	-	-
17	$x_i$	1,5	0,5	0	-2	-	-	-	-	-	-	-	-
	$y_i$	1,063	-1,94	-0,19	1,063	-	-	-	-	-	-	-	-
18	$x_i$	0,75	0,75	0,25	-1,75	-	-	-	-	-	-	-	-
	$y_i$	1,063	-1,94	-0,19	1,063	-	-	-	-	-	-	-	-
19	$x_i$	2	0	-2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	$y_i$	0,333	-0,67	0,333	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	$x_i$	2	0	-2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	$y_i$	-0,67	-1,67	2,33	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Таблица 2. Параметры размещения кругов

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	6,644	13,90	16,83	13,33	11,93	15,07	17,07	10,36	17,43	17,53
$y_i$	2,000	4,063	1,800	9,941	6,954	7,256	4,993	9,488	8,573	10,87

Таблица 3. Параметры размещения многоугольников

$i$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_i$	1,574	3,302	12,476	3,044	6,048	8,656	15,246	8,2940	10,99	1,661
$y_i$	10,39	1,565	1,1709	6,440	8,429	3,591	10,937	10,927	11,49	2,679
$\theta_i$	1,346	1,107	-0,449	-1,03	0,862	0,960	-0,000	-0,014	0,089	1,654

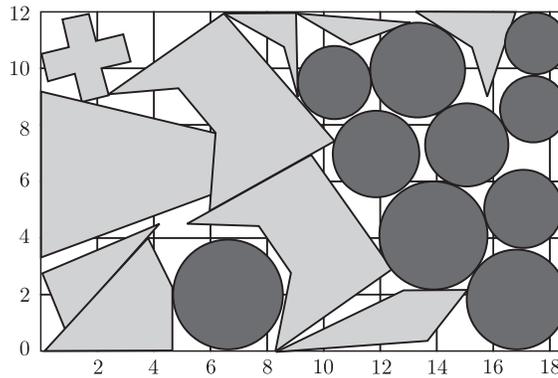


Рис. 1. Результат решения задачи

Требуется разместить эти круги и многоугольники в прямоугольнике шириной 12 и минимальной длиной  $l^0$ .

Результат решения приведен на рис. 1, а значения параметров размещения кругов и многоугольников, соответствующие этому размещению, — в табл. 2 и 3. При этом  $l^0 = 18,629$ .

1. Новожилова М. В. Методологія розв'язку оптимізаційних нелінійних задач геометричного проектування // Вісн. Запорізьк. держ. ун-ту. – 1999. – № 1. – С. 79–83.
2. Milencovich V. Rotational polygon overlap minimization and compaction // Computat. Geometry. – 1998. – No 10. – С. 305–318.
3. Stoyan Yu., Terno J., Scheithaue G. et al.  $\Phi$ -functions for primary 2D-objects: Prepr. / Technische Universität Dresden; MATH-NM – 15–2001. – Dresden. – 2001. – 28 p.
4. Stoyan Y. G.  $\Phi$ -function of non-convex polygons with rotations // Пробл. машиностроения. – 2003. – Вып. 6. – No 1. – С. 74–86.
5. Stoyan Y., Gil M., Terno J., Scheithauer G.  $\Phi$ -function for complex 2D objects // 4OR Quarterly J. of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. – 2004. – 2, No 1. – P. 69–84.
6. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. – Москва: Высш. шк., 1979. – 336 с.
7. Пандорин О. К., Панкратов О. В., Новожилова М. В. Аналіз і складність алгоритму зображення однозв'язного не опуклого многокутника у вигляді об'єднання опуклих многокутників // Вісн. Запорізьк. держ. ун-ту. – 1999. – № 2. – С. 79–83.
8. Стоян Ю. Г., Соколовский В. З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – Киев: Наук. думка, 1980. – 208 с.
9. Stoyan Yu., Gil' N., Pankratov A., Scheithauer G. Packing of non-convex polytopes into a parallelepiped: Preprint / Technische Universität Dresden; MATH-NM – 06–2004. – Dresden, 2004. – 27 p.
10. Чугай А. М. Решение задачи упаковки кругов в выпуклый многоугольник с помощью модифицированного метода сужающихся окрестностей // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 1. – С. 58–63.
11. Зонтендейк Г. Методы возможных направлений. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. – 176 с.
12. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. – Москва: Наука, 1986. – 328 с.

Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 10.07.2006