



УДК 62-253.517.9.621.34

© 2007

Член-корреспондент НАН України А. Е. Божко

### Минимизация мощности управления электромагнитных механизмов

*A solution of the problem on the determination of an algorithm of optimum control over electromagnetic mechanisms is given. The problem was solved by the method of moments with minimization of the integral functional of energy.*

В крупных технических системах, таких как электросети, мартеновские печи, прокатные станы, суда, космические корабли, автоматизированные цеха производства, системы связи и др., используется большое количество электромагнитных механизмов ЭМ (контакторов, реле, муфт, пускателей и т. д.), а в технологическом оборудовании ряда производств применяются электромагнитные вибровозбудители. Все эти ЭМ в сумме потребляют большое количество электроэнергии, особенно в переходных процессах не только в самих ЭМ, но и в объектах нагрузки (электродвигатели, различные нагрузки электросетей и т. д.). В связи с этим возникает задача определения закона оптимального управления ЭМ, обеспечивающего минимизацию энергии потребления ЭМ. Рассмотрим решение такой задачи.

В качестве критерия оптимальности примем функционал

$$I(u) = \int_0^T bU^2(t) dt, \quad (1)$$

где  $T$  — время, в течение которого минимизируется мощность управления в ЭМ;  $U$  — управляющее электрическое напряжение;  $t$  — текущее время.

Данное решение осуществим с учетом перевода подвижной части ЭМ из начального положения в конечное за время  $T$ . Наиболее приемлемым методом для синтеза оптимального управления, удовлетворяющего минимуму (1), на наш взгляд, является метод моментов [1–4]. Обоснование применения метода моментов для нахождения оптимального управления динамическими объектами дано Н. Н. Красовским в работе [1]. В [3, 4] представлены решения методом моментов для электродинамических вибростендов и колебательных механических систем с любым числом степеней свободы. Во всех этих работах предусматривается линейность объекта управления. В ЭМ же проявляется нелинейность (квадратичная

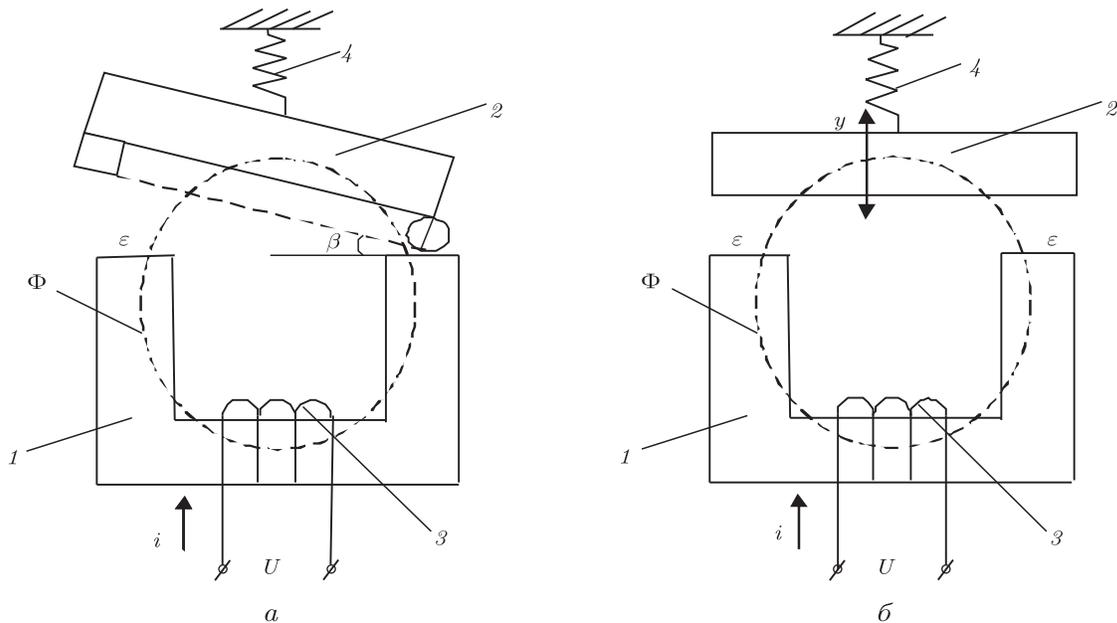


Рис. 1

зависимость тягового усилия или вращающего момента от входного напряжения управления), которая в решении данной задачи вносит определенные коррективы.

Для наглядности приведем на рис. 1, а, б основные две электромагнитомеханические схемы ЭМ, где 1 — магнитопровод; 2 — якорь (подвижная часть); 3 — электрическая обмотка с током  $i$  и числом витков  $w$ ;  $\varepsilon$  — воздушный зазор;  $U$  — входное управляющее напряжение;  $\Phi$  — магнитный поток; 4 — пружины;  $\text{////}$  — корпус.

На рис. 1, а изображен ЭМ с поворотным перемещением якоря 2, а на рис. 1, б — ЭМ с прямоходовым перемещением якоря 2.

Уравнения движения представленных ЭМ имеют вид:

для ЭМ (рис. 1, а)

$$J \frac{d^2 \beta}{dt^2} + R_\beta \frac{d\beta}{dt} + C_\beta \beta = M, \quad (2)$$

где  $J$ ,  $M$  — моменты инерции и тяговый (вращающий) соответственно;  $R_\beta$ ,  $C_\beta$  — коэффициенты сопротивления (диссипации) и упругости соответственно;  $\beta$  — угол поворота якоря 2 (см. рис. 1, а);

для ЭМ (рис. 1, б)

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + Cy = F, \quad (3)$$

где  $m$  — масса якоря с механической нагрузкой;  $b$ ,  $c$  — коэффициенты диссипации и упругости соответственно;  $y$  — перемещение якоря (см. рис. 1, б);  $F$  — тяговое усилие;  $t$  — время.

В уравнениях (2) и (3)

$$F = \frac{dW_e}{d\varepsilon}, \quad M = \frac{dW_e}{d\beta}, \quad (4)$$

где  $W_e$  — электромагнитная энергия ЭМ.

Для упрощения задачи будем определять оптимальное управление ЭМ для объекта, описываемого уравнением движения

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = f(t), \quad (5)$$

которое эквивалентно (2) и (3). Здесь  $x$  — координата перемещения ( $\beta$  или  $y$ );  $a_2, a_1, a_0, f(t)$  соответствуют  $J, R_\beta, C_\beta, M$  для (2) и  $m, b, c, F$  — для (3).

Электромагнитные системы ЭМ с поворотным и прямоходовым якорем 2 описываются одинаковыми уравнениями магнитной и электрической частей (см. [5]).

Уравнение электрической части ЭМ касается связи тока  $i$  и задающего напряжения  $U$  в виде

$$U = ri + L \frac{di}{dt}, \quad (6)$$

где  $r$  — активное сопротивление провода электрической катушки совместно с внутренним активным сопротивлением источника напряжения  $U$ ;  $L$  — индуктивность этой же катушки

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{w\Phi_1}{i} = w^2G_1 = \mu_0w^2\frac{S}{\varepsilon}; \\ L_2 &= \frac{w\Phi_2}{i} = w^2G_2 = \mu_0w^2\frac{S}{2\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $L_1, L_2$  — индуктивности для поворотного и прямоходового ЭМ соответственно;  $w$  — число витков катушки 3;  $G_1, G_2$  — магнитные проводимости совместно для тех же ЭМ;  $\Phi_1, \Phi_2$  — магнитные потоки в ЭМ;  $S$  — площадь поперечного сечения магнитопровода на полюсе у зазора  $\varepsilon$ ;  $\mu_0$  — магнитная проницаемость воздуха.

Уравнения магнитной части ЭМ определяют связь магнитного потока  $\Phi$  с током  $i$  и тягового усилия (момента) с магнитным потоком  $\Phi$  или с током  $i$  и напряжением  $U$ .

Эти связи следующие:  $\Phi = iwG$  (закон полного тока [6]);  $F$  и  $M$  определяются из (4).

Электромагнитная энергия ЭМ

$$W_e = \frac{1}{2}Li^2. \quad (8)$$

Для поворотного ЭМ угол  $\beta = \arcsin \varepsilon/h \approx \varepsilon/h$ , где  $h$  — длина якоря 2.

Преобразуем (8) для поворотного ЭМ. Для этого запишем

$$L = w^2G = \mu_0Sw^2\frac{1}{\varepsilon} = \mu_0Sw^2\frac{1}{\beta h}.$$

Тогда энергия для поворотного ЭМ выражается так:

$$W_{e\Pi} = \frac{\mu_0S}{2\beta h}(iw)^2 = \frac{(iwG)^2}{2\mu_0S}\beta h = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0S}\beta h. \quad (9)$$

Применяя к (9) действие (4), получим выражение вращающего момента в виде

$$M = \frac{\Phi_1^2 h}{2\mu_0S} = \frac{\mu_0Sh}{2} \left( \frac{iw}{\varepsilon} \right)^2. \quad (10)$$

Для прямоходового ЭМ

$$W_{\text{ЭПР}} = \frac{1}{2} L_2 i^2 = \frac{1}{2} w^2 G_2 i^2 = \frac{1}{2} (iw)^2 \frac{\mu_0 S}{2\varepsilon} = \frac{\Phi_2^2 \varepsilon}{\mu_0 S}$$

и тогда, с учетом (3), тяговое усилие

$$F = \frac{\Phi_2^2}{\mu_0 S} = \mu_0 S \left( \frac{iw}{2\varepsilon} \right)^2. \quad (11)$$

Величины  $M$  и  $F$  в уравнении (5) фигурируют как  $f(t)$  соответственно для поворотного и прямоходового ЭМ.

Итак, независимо от вида ЭМ, обобщенные уравнения электромагнитного механизма ЭМ с учетом (11) имеют вид

$$\begin{cases} U = ri + L_k \frac{di}{dt}; \\ iwG_k = \Phi_k; \\ f(t) = b_k \Phi_k^2; \\ a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t), \end{cases} \quad (12)$$

где  $k = 1, 2$  (1 относится к поворотному ЭМ, а 2 — прямоходовому ЭМ);  $b_1 = h/(2\mu_0 S)$ ;  $b_2 = 1/(\mu_0 S)$ .

В соответствии с методом моментов [1] функцию оптимального управления ЭМ можно определить по формуле

$$f(\bar{x}_0, t) = \lambda^2(\bar{x}_0) \sum_{i=1}^n l_i^0 h_i(t), \quad (13)$$

где  $\bar{x}_0 = \bar{x}(0)$ ,  $\lambda(\bar{x}_0)$ ,  $l_i^0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — величины, получаемые в результате решения на условный экстремум выражения

$$\lambda^{-2}(\bar{x}_0) = \min_{l_1, \dots, l_n} \left\{ \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^n l_i^0 h_i(t) \right]^2 dt \right\} \quad (14)$$

при условии  $\sum_{i=1}^n l_i^0 x_{i0} = -1$ .

В соотношениях (13), (14)  $h_i(t)$  — импульсные переходные функции каналов действия управляющих сигналов.

Как видно из (12), в системе уравнений присутствует нелинейность  $b_k \Phi_k^2$ . Поэтому в качестве корректива в данной задаче воспользуемся принципом динамического программирования [7], предусматривающего нахождение оптимального управления  $U$  на каждой функциональной части ЭМ. В нашем случае решение может заключаться в нахождении оптимального тягового усилия  $F_{\text{опт}}$  или оптимального вращающего момента  $M_{\text{опт}}$ , являющихся управляющими воздействиями для механических частей ЭМ (движение якоря 2) и нахождения оптимального управления  $U_{\text{опт}}$  электромагнитной части ЭМ.

При таком решении на основе оптимизации электромагнитной части получаем  $U_{\text{опт}}$  и, соответственно,  $F_{1\text{опт}} = d_1 U_{\text{опт}}^2$ . Оптимизируя тяговое усилие  $F$  на основе уравнения движения механической части, находим  $F_{2\text{опт}} = d_2 U_{2\text{опт}}^2$ . Далее видим, что

$$\frac{F_{1\text{опт}}}{F_{2\text{опт}}} = \frac{d_1 U_{1\text{опт}}^2}{d_2 U_{2\text{опт}}^2},$$

откуда

$$U_{2\text{опт}} = U_{1\text{опт}} \left( \frac{d_1 F_{2\text{опт}}}{d_2 F_{1\text{опт}}} \right)^{1/2}.$$

Могут быть и другие варианты получения  $U_{\text{опт}}$  и, в частности, квазиоптимального управления. В любом случае необходимо уравнения (12) представить в форме Коши в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L_k}(rx_1 + U); \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{a_2}[-a_0x_2 - a_1x_3 + f(t)]; \\ f(t) = Bx_1^2, \end{cases} \quad (15)$$

где  $x_1 = i$ ,  $B = b'_k(wG_k)^2$ .

Нахождение оптимального  $U(t)$  из (15) может быть и таким. Учитывая уравнение механической части ЭМ, находим оптимальную функцию  $f(t) = f_{\text{опт}}$ , затем находим  $x_{1\text{опт}} = (f_{\text{опт}}/B)^{1/2}$ , а после, решая первое уравнение (15), определяем  $x_1 = (U/r)(1 - e^{-t/\tau})$ , где  $\tau = L/r$ , откуда при  $x_1 = x_{1\text{опт}}$  видим, что

$$U_{\text{опт}}(t) = x_{1\text{опт}}r(1 - e^{-t/\tau})^{-1} = \left( \frac{f_{\text{опт}}}{B} \right)^{1/2} r(1 - e^{-t/\tau})^{-1}. \quad (16)$$

Возможен еще один корректив в задаче определения  $U_{\text{опт}}$ . Известно, что любая безынерционная система всегда будет обрабатывать входной сигнал наилучшим (оптимальным) образом. В связи с этим желательно, чтобы электромагнитная часть была безынерционной. Это можно осуществить следующим образом. Обычно в ЭМ  $r \ll x_L$  — индуктивного сопротивления. Поэтому уравнение  $U = ri + Ldi/dt$  можно представить в виде

$$i = \frac{1}{L} \int U(t) dt. \quad (17)$$

Если бы в (17) вместо  $U(t)$  стояла функция  $dU(t)/dt$ , то

$$\int \frac{dU(t)}{dt} dt = U(t)$$

и

$$i(t) = \frac{1}{L} U(t). \quad (18)$$

Кроме того, на основании (12) с учетом (18)

$$f(t) = B_k i^2, \quad (19)$$

где  $B_k = b_k (wG_k)^2$ .

Входное напряжение ЭМ можно пропустить через звено извлечения квадратного корня, затем через дифференцирующее устройство и усилитель мощности, тогда

$$i(t) = g\sqrt{U(t)}, \quad (20)$$

где  $g$  — коэффициент, и, учитывая (20),

$$f(t) = B_k \frac{1}{L} U(t).$$

Воспользовавшись предлагаемыми принципами, будем находить оптимальную функцию (13)  $f_{\text{опт}}(t) = f(\bar{x}_0, t)$  для подвижной системы ЭМ. Минимум (14) можно найти по правилу множителей Лагранжа. Для подвижной системы ЭМ, описываемой уравнением (5), определим минимум функции [1, 3]

$$z(l_1, l_2) = \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^2 l_i h_i(t) \right]^2 dt + 2\gamma \left( \sum_{i=1}^2 l_i x_{i0} + 1 \right), \quad (21)$$

где  $2\gamma$  — множитель Лагранжа, приравняв нулю производные (21) по  $l_1, l_2$ .

Тогда

$$\frac{dz}{dl_k} = \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^2 l_i h_i(t) \right] h_k(t) dt + \gamma x_{k0} = 0. \quad (22)$$

Умножив каждое уравнение из (22) на соответствующее по индексу  $l_k (k = 1, 2)$  и просуммировав все выражения, определим значение множителя  $\gamma$ . В результате получим

$$\int_0^T \left[ \sum_{i=1}^2 l_i h_i(t) \right]^2 dt + \gamma \sum_{i=1}^2 l_i x_{i0} = 0$$

или, учитывая, что  $\sum_{i=1}^2 l_i x_{i0} = -1$ , в точке экстремума  $\lambda^{-2}(\bar{x}_0)$

$$\gamma = \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^2 l_i^0 h_i(t) \right]^2 dt. \quad (23)$$

Подставим  $\gamma$  в (22) и произведем интегрирование каждого уравнения. При этом обозначим

$$\int_0^T h_1^2(t) dt = \delta_{11}; \quad \int_0^T h_2^2(t) dt = \delta_{22}; \quad \int_0^T h_1(t)h_2(t) dt = \delta_{12} = b_{21}.$$

Получим

$$\left. \begin{aligned} l_1^0 \delta_{11} + l_2^0 \delta_{12} + \gamma x_{10} &= 0; \\ l_1^0 \delta_{21} + l_2^0 \delta_{22} + \gamma x_{20} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Из (24) найдем

$$l_1^0 = \frac{\Delta_{1i}}{\Delta_i}; l_2^0 = \frac{\Delta_{2i}}{\Delta_i}, \quad (25)$$

где  $\Delta_i = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_{1i}$ ,  $\Delta_{2i}$  — определители, полученные из  $\Delta_i$  путем замены соответствующего столбца столбцом  $(-x_{10}, -x_{20})$ .

Из (25) множитель Лагранжа

$$\gamma = \frac{l_1^0}{k_{2\Delta}} = \frac{l_2^0}{k_{2\Delta}},$$

где  $k_{s\Delta} = \frac{\Delta_{si}}{\Delta_i}$ ,  $s = 1, 2$ .

Сравнивая (14) и (23), видим, что  $\gamma = \lambda^{-2}(\bar{x}_0)$ . Для определения  $\gamma$  необходимо найти числа  $l_1^0$ ,  $l_2^0$ . Для этого запишем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} l_1^0 x_{10} + l_2^0 x_{20} &= -1; \\ l_1^0 k_{2\Delta} &= l_2^0 k_{1\Delta}, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$l_1^0 = l_2^0 \frac{k_{1\Delta}}{k_{2\Delta}}, \quad l_2^0 = \frac{-1}{\frac{k_{1\Delta}}{k_{2\Delta}} x_{10} + x_{20}}.$$

Таким образом, функция оптимального управления  $f(\bar{x}_0, t)$ , определяемая по формуле (13), имеет следующий вид:

$$f(\bar{x}_0, t) = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^2 l_i^0 h_i(t). \quad (26)$$

Согласно [3, 4], импульсные переходные функции

$$h_1(t) = \frac{1}{m} \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right); \quad h_2(t) = \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right),$$

где  $m$  — масса якоря 2 ЭМ;  $\lambda_{1,2}$  — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{c}{m} = 0$$

( $b$ ,  $c$  — коэффициенты диссипации и жесткости соответственно, т. е.  $\lambda_{1,2} = k_\lambda \pm j\omega_\lambda$ ).

После подстановки в (26) значений  $h_1(t)$  и  $h_2(t)$  получим закон оптимального управления ЭМ, который выражается соотношениями

$$f_{\text{опт}}(t) = \frac{1}{\gamma} A_{\lambda} e^{-k_{\lambda} t} \sin(\omega_{\lambda} t + \varphi_{\lambda}), \quad (27)$$

где  $A_{\lambda} = \sqrt{P_{\lambda}^2 + H_{\lambda}^2}$ ;  $\varphi_{\lambda} = \arctg(P_{\lambda}/H_{\lambda})$ ;

$$P_{\lambda} = \frac{-1}{\omega_{\lambda}(k_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2)} [l_1^0 \omega_{\lambda} - 2l_2^0 \omega_{\lambda} k_{\lambda}]; \quad H_{\lambda} = \frac{1}{\omega_{\lambda}(k_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2)} [k_{\lambda} l_1^0 + (k_{\lambda}^2 - \omega_{\lambda}^2) l_2^0].$$

Подставив (27) в (16) или в (20), получим алгоритмы оптимального управления ЭМ, удовлетворяющие минимуму функционала (1) и обеспечивающие минимизацию мощности управления ЭМ при переходе подвижной части ЭМ из начального состояния в конечное. Эти алгоритмы выражаются соотношениями

$$U_{1\text{опт}}(t) = r(1 - e^{-t/\tau})^{-1} \left[ \frac{A_{\lambda}}{B\gamma} e^{-k_{\lambda} t} \sin(\omega_{\lambda} t + \varphi_{\lambda}) \right]^{1/2}, \quad (28)$$

$$U_{2\text{опт}}(t) = \frac{L A_{\lambda}}{B_k \gamma} e^{-k_{\lambda} t} \sin(\omega_{\lambda} t + \varphi_{\lambda}). \quad (29)$$

Заметим, что в данных алгоритмах присутствует величина магнитной проводимости  $G_k$  (см. (7)), зависящая от величины воздушного зазора  $\varepsilon$ . При движении якоря ЭМ к магнитопроводу воздушный зазор уменьшается. Если перемещение якоря  $z$   $x(t) = \varepsilon$ , то, по существу, воздушный зазор  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  и определяется как решение уравнений (2) и (3) при  $M$  и  $F$  оптимальных, описываемых выражением (27).

Исходя из этого, в окончательных алгоритмах (формулах)  $M_{\text{опт}}$  и  $F_{\text{опт}}$ , а соответственно и  $U_{1\text{опт}}$  и  $U_{2\text{опт}}$ , должны присутствовать  $\varepsilon(t)$ , являющиеся решениями уравнений (2) и (3) при  $M_{\text{опт}}$  и  $F_{\text{опт}}$ . Как видно из (27)–(29), полученные алгоритмы отражают математическую запись переходного процесса координаты  $x(t) = \varepsilon(t)$  в ЭМ. При таком управлении исключаются излишки подводимой к ЭМ энергии. Эти оптимальные управления действуют в ЭМ во время переходных процессов. В установившемся режиме необходимое состояние ЭМ поддерживается напряжениями  $U = \text{const}$  для ЭМ постоянного тока и  $U = U_a \sin \omega t$ , где  $U_a$  — амплитуда;  $\omega$  — круговая частота для ЭМ переменного тока. В ЭМ переменного тока алгоритмы (27)–(29) относятся к формулам амплитуд  $U_a$ , которые в установившемся режиме имеют постоянное значение.

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — Москва: Наука, 1968. — 475 с.
2. Чистов В. П., Бондаренко В. И., Святославский В. А. Оптимальное управление электрическими приводами. — Москва: Энергия, 1968. — 232 с.
3. Божко А. Е. Оптимальное управление в системах воспроизведения вибраций. — Киев: Наук. думка, 1977. — 219 с.
4. Божко А. Е. Синтез оптимального управления колебательными системами. — Киев: Наук. думка, 1990. — 164 с.
5. Любчик М. А. Оптимальное проектирование силовых электромагнитных механизмов. — Москва: Энергия, 1974. — 392 с.
6. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. — Москва: Высш. шк., 1978. — 529 с.
7. Беллман Р. Динамическое программирование. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. — 400 с.

Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 03.06.2006