1. *Механика* контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва: Физматгиз, 2001. – 670 с.
2. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. – Москва: Наука, Физматгиз, 1995. – 352 с.
3. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
4. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
5. *Кубенко В. Д.* Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды // Прикл. мех. – 2004. – **40**, № 11. – С. 3–44.
6. *Кубенко В. Д., Марченко Т. А.* Осесимметричная задача соударения двух одинаковых тел вращения // Там же. – № 7. – С. 70–80.
7. *Кубенко В. Д., Марченко Т. А., Старовойтов Э. И.* Об определении напряженого состояния плоского упругого слоя при ударе тупым жестким телом о его поверхность // Доп. НАН України. – 2006. – № 8. – С. 47–56.
8. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 220 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.07.2006

УДК 539.3

П. С. Ковальчук, Л. А. Крук

Анализ нелинейного взаимодействия изгибных форм композитных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

The problem of the particularities of a multimode nonlinear deformation of the orthotropic cylindrical shells filled by a liquid on their free vibrations is considered. The main attention is paid to the analysis of the interaction of different forms (the modes) of a carrying shell on the realization of internal resonances.

Проблеме нелинейных колебаний тонких цилиндрических оболочек с учетом взаимодействия различных изгибных форм посвящены работы [1, 2 и др.]. В [3, 4] исследованы особенности влияния жидкостного заполнителя (частичное заполнение) на процессы динамического взаимодействия форм несущих оболочек.

В данной работе рассматривается задача о многомодовых нелинейных колебаниях композитных цилиндрических оболочек (ортотропная модель), полностью заполненных жидкостью. Главное внимание уделяется изучению специфики взаимодействия в условиях резонансов сопряженных и несопряженных изгибных форм этих оболочек при свободных колебаниях совокупной системы оболочка — жидкость.

1. Исходные динамические уравнения оболочки, несущей жидкость, выберем в смешанной форме [5, 6]

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left[D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]=L(w,\Phi)+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{P_h}{h}-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};\\&A_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+(A_{66}+2A_{12})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+A_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=-\frac{1}{2}L(w,w)-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь w — радиальный прогиб; D_{jk} — жесткостные параметры оболочки, причем

$$D_{ii}=\frac{E_i h^3}{12(1-\mu_1\mu_2)}\quad(i=1,2);\qquad D_{66}=\frac{Gh^3}{12};\qquad D_{12}=D_{11}\mu_2;\tag{2}$$

A_{jk} — компоненты матрицы податливости ортотропного материала

$$A_{ii}=\frac{1}{E_i}(i=1,2);\qquad A_{12}=-A_{11}\mu_1;\qquad A_{66}=\frac{1}{G};\qquad E_1\mu_2=E_2\mu_1;\tag{3}$$

P_h — гидродинамическое давление на оболочку со стороны жидкости; остальные обозначения — общепринятые.

Динамический прогиб оболочки w с учетом различных форм аппроксимируем разложением [2]

$$\begin{aligned}w=&f_1(t)\cos s_1y\sin\lambda x+f_2(t)\sin s_1y\sin\lambda x+f_3(t)\cos s_2y\sin\lambda x+\\&+f_4(t)\sin s_2y\sin\lambda x+f_5(t)\sin^4\lambda x,\end{aligned}\tag{4}$$

удовлетворяющим условиям свободного опирания на торцах. Здесь $s_k=n_k/R$ $(k=1,2)$, $\lambda=m\pi/l$ — параметры волнообразования в окружном и продольном направлениях соответственно (l — длина оболочки); $f_k(t)$ — некоторые функции времени. Давление жидкости P_h определим из соотношения [6] $P_h=-\rho_0\partial\varphi/\partial t$, где ρ_0 — плотность жидкости; $\varphi=\varphi(x,r,\theta,t)$ — потенциал скоростей, который находим, решая краевую задачу [3, 7],

$$\triangle\varphi=0;\qquad\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=0}<\infty;\qquad\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{\partial w}{\partial t};\qquad\varphi\big|_{x=0}=\varphi\big|_{x=l}=0\tag{5}$$

(x, r, θ — цилиндрические координаты).

Подставляя функцию прогиба w (4) и функцию давления P_h в (1) и реализуя известную процедуру метода Бубнова–Галеркина, получим систему уравнений для нахождения неизвестных обобщенных перемещений f_k $(k=\overline{1,5})$

$$\begin{aligned}&\ddot f_j+\omega_j^2f_j+k_{j1}(f_1^2+f_2^2)f_j+k_{j2}(f_3^2+f_4^2)f_j+k_{j3}f_5f_j+k_{j4}f_5^2f_j=0;\\&\ddot f_5+\omega_5^2f_5+k_{51}(f_1^2+f_2^2)+k_{52}(f_3^2+f_4^2)+k_{53}(f_1^2+f_2^2)f_5+k_{54}(f_3^2+f_4^2)f_5=0.\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь $j=\overline{1,4}$; ω_j — собственные частоты оболочки, причем

$$\begin{aligned}&\omega_1^2=\omega_2^2=\frac{1}{\rho m_{01}}\left(\frac{1}{h}\triangle_D(\lambda,s_1)+\frac{\lambda^4}{R^2\triangle_\delta(\lambda,s_1)}\right);\\&\omega_3^2=\omega_4^2=\frac{1}{\rho m_{02}}\left(\frac{1}{h}\triangle_D(\lambda,s_2)+\frac{\lambda^4}{R^2\triangle_\delta(\lambda,s_2)}\right);\\&m_{0p}=1+\frac{\rho_0}{\rho}\frac{I_{n_p}(\lambda R)}{\lambda R I'_{n_p}(\lambda R)},\end{aligned}\tag{7}$$

где $\triangle_D$, $\triangle_\delta$ — операторы вида

$$\begin{aligned}&\triangle_D(\lambda, s_p) = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 s_p^2 + D_{22}s_p^2;\\ &\triangle_\delta(\lambda, s_p) = \delta_2\lambda^4 + 2\delta_3\lambda^2 s_p^4 + \delta_1 s_p^4\end{aligned} \tag{8}$$

($p = 1, 2$; $\delta_{1,2} = 1/E_{1,2}$; $2\delta_3 = 1/G - 2\mu_1/E_1$), частота ω_5 отвечает осесимметричной форме колебаний

$$\omega_5^2 = \frac{64}{35\rho m_{05}}\left(\frac{8D_{11}\lambda^4}{h} + \frac{35}{64R^2\delta_2}\right) \tag{9}$$

(m_{05} — параметр присоединенной массы; k_{rq} ($r = \overline{1,5}$, $q = \overline{1,4}$) — постоянные коэффициенты, характеризующие геометрическую нелинейность оболочки).

Уравнения (6) являются исходными для исследования особенностей взаимодействия как сопряженных (с одними и теми же параметрами волнообразования), так и несопряженных (с различными параметрами s_1, s_2) форм деформирования оболочек, заполненных жидкостью.

2. Эффекты взаимодействия форм оболочек наиболее существенно будут проявляться при реализации в системе (6) внутренних резонансов вида $\omega_1 \approx k\omega_3$, $k = 1, 2, 1/2$ [1, 8]. Строго эти резонансы будут выполняться при равенстве

$$c_0(\xi)\eta^3 + c_1(\xi)\eta^2 + c_2(\xi)\eta + c_3(\xi) = 0, \tag{10}$$

полученном на основании (7). Здесь обозначено

$$\begin{aligned}&\xi = \frac{l}{R}; \qquad \eta = \frac{h}{R}; \qquad c_0(\xi) = M_1 - M_2k^2; \qquad c_1(\xi) = M_1\beta_2 - M_2\beta_1k^2;\\ &c_2(\xi) = M_0(C_2 - C_1k^2); \qquad c_3(\xi) = M_0(C_2\beta_2 - C_1k^2\beta_1);\\ &M_{1,2} = n_{1,2}^4 + k_1\left(\frac{m\pi}{\xi}\right)^4 + k_2\left(\frac{m\pi}{\xi}\right)^2 n_{1,2}^2;\\ &C_{1,2} = n_{1,2}^4 + k_1\left(\frac{m\pi}{\xi}\right)^4 + k_3\left(\frac{m\pi}{\xi}\right)^2 n_{1,2}^2; \qquad M_0 = \frac{12(1-\mu_1\mu_2)k_1(m\pi)^4}{C_1C_2\xi^4};\\ &k_1 = \frac{E_1}{E_2}; \qquad k_2 = 2\left(\mu_2k_1 + \frac{2(1-\mu_1\mu_2)}{k_4}\right); \qquad k_3 = k_4 - \frac{2\mu_1}{k_1}; \qquad k_4 = \frac{E_2}{G};\\ &\beta_{1,2} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{I_{n_{1,2}}\left(\dfrac{m\pi}{\xi}\right)}{m\pi I'_{n_{1,2}}\left(\dfrac{m\pi}{\xi}\right)}.\end{aligned} \tag{11}$$

В качестве иллюстрации на рис. 1 показаны графические зависимости $\eta = \eta(\xi)$, построенные на основании уравнения (10) при $m = 1$; $k = 1$; $k_1 = 1{,}75$; $k_2 = 1{,}054$; $k_3 = 10{,}1$; $k_4 = 5{,}08$; $\mu_1 = 0{,}2$; $\mu_2 = 0{,}114$; $\rho = 1{,}65\rho_0$. Сплошные кривые соответствуют заполненной жидкостью оболочке ($\rho_0 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3), штриховые — этой же оболочке без жидкости.

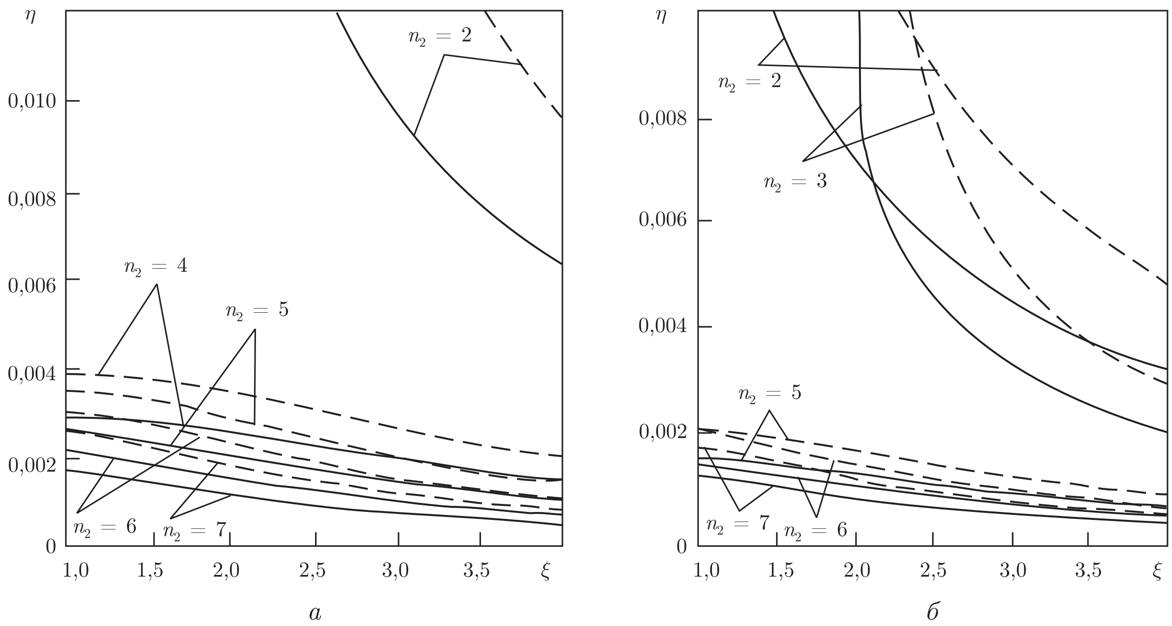

Рис. 1

Из полученных графиков следует, что практически каждая ортотропная оболочка с жидкостью или без нее может иметь близкие собственные частоты (при определенных геометрических размерах). При этом вероятность выполнения рассматриваемого основного внутреннего резонанса $\omega_1 \approx \omega_3$ значительно выше для оболочек, полностью заполненных жидкостью. Это обусловлено тем, что наличие жидкости не только "способствует" существенному уменьшению собственных частот этой оболочки (как показали вычисления, в 2–4 раза), но и обусловливает "сгущение" ее частотного спектра в зоне низких частот (по сравнению со случаем, когда жидкость в ней отсутствует).

При наличии в системе (6) внутреннего резонанса $\omega_1 \approx \omega_3$ ее решение в соответствии с [9] и с учетом условия $f_5 \ll f_k$ $(k = \overline{1,4})$ [1, 10] можно в первом приближении представить в виде

$$\begin{gathered}
f_1 = u_1 \cos\omega t + u_2 \sin\omega t; \qquad f_2 = u_3 \cos\omega t + u_4 \sin\omega t; \\
f_3 = u_5 \cos\omega t + u_6 \sin\omega t; \qquad f_4 = u_7 \cos\omega t + u_8 \sin\omega t; \\
f_5 = -\frac{1}{\omega_5^2}[k_{51}(f_1^2 + f_2^2) + k_{52}(f_3^2 + f_4^2)]; \qquad \omega = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_3^2}{2}}.
\end{gathered} \tag{12}$$

При этом неизвестные функции u_k должны быть определены из системы связанных уравнений (при учете нелинейностей до третьей степени включительно)

$$\frac{du_1}{d\tau} = M_1 u_2 + T_2 K_1 u_3 + T_3 K_2 u_5 + T_3 K_3 u_7;$$

$$\frac{du_2}{d\tau} = -M_1 u_1 + T_2 K_1 u_4 + T_3 K_2 u_6 + T_3 K_3 u_8;$$

$$\frac{du_3}{d\tau} = M_1 u_4 - T_2 K_1 u_1 + T_3 K_4 u_5 + T_3 K_5 u_7;$$

$$\begin{aligned}
&\frac{du_4}{d\tau} = -M_1u_3 - T_2K_1u_2 + T_3K_4u_6 + T_3K_5u_8;\\
&\frac{du_5}{d\tau} = M_2u_6 + T_5K_6u_7 - T_6K_2u_1 - T_6K_4u_3;\\
&\frac{du_6}{d\tau} = -M_2u_5 + T_5K_6u_8 - T_6K_2u_2 - T_6K_4u_4;\\
&\frac{du_7}{d\tau} = M_2u_8 - T_5K_6u_5 - T_6K_3u_1 - T_6K_5u_3;\\
&\frac{du_8}{d\tau} = -M_2u_7 - T_5K_6u_6 - T_6K_3u_2 - T_6K_5u_4.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь введено "медленное время" $\tau = t/(2\omega)$ и обозначено

$$\begin{aligned}
&M_1 = \Delta_1 + T_1A_1^2 + \overline{T_1}A_2^2; \qquad M_2 = \Delta_2 + T_4A_2^2 + \overline{T_4}A_1^2;\\
&K_1 = u_1u_4 - u_2u_3; \qquad K_2 = u_1u_6 - u_2u_5; \qquad K_3 = u_1u_8 - u_2u_7;\\
&K_4 = u_3u_6 - u_4u_5; \qquad K_5 = u_3u_8 - u_4u_7; \qquad K_6 = u_5u_8 - u_6u_7;\\
&A_1^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} u_k^2; \qquad A_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=5}^{8} u_i^2; \qquad \Delta_1 = \omega_1^2 - \omega^2; \qquad \Delta_2 = \omega_2^2 - \omega^2;\\
&T_1 = 3T_2 = \frac{3\gamma_1}{2}; \qquad T_3 = \frac{\overline{T_1}}{3} = \frac{\gamma_2}{3}; \qquad T_4 = 3T_5 = \frac{3\gamma_3}{2}; \qquad T_6 = \frac{\overline{T_4}}{3} = \frac{\gamma_4}{2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Постоянные коэффициенты γ_1–γ_4 выражаются так:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = k_{11} - \frac{k_{13}k_{51}}{\omega_5^2}; \qquad \gamma_2 = k_{12} - \frac{k_{13}k_{52}}{\omega_5^2};\\
&\gamma_3 = k_{22} - \frac{k_{23}k_{52}}{\omega_5^2}; \qquad \gamma_4 = k_{21} - \frac{k_{23}k_{51}}{\omega_5^2}.
\end{aligned} \tag{15}$$

3. Умножая поочередно каждое из уравнений (13) на $u_1, u_2, \ldots, u_8$ соответственно и суммируя затем все эти уравнения, можно получить интеграл вида

$$\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}{\gamma_2} + \frac{u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}{\gamma_4} = C_0, \tag{16}$$

где C_0 — постоянная интегрирования. Из него следует, что приданная в начальный момент времени $\tau = \tau_0$ несущей оболочке энергия будет впоследствии (при $\tau > \tau_0$) перераспределяться между всеми ее обобщенными координатами f_k $(k = \overline{1,4})$. Увеличение в процессе колебаний одной из амплитуд u_k будет сопровождаться соответствующим уменьшением других амплитуд u_i $(i \neq k)$, и наоборот.

Два других интеграла системы (13) имеют вид

$$K_1 = u_1u_4 - u_2u_3 = C_1; \qquad K_6 = u_5u_8 - u_6u_7 = C_2 \qquad (C_{1,2} = \mathrm{const}). \tag{17}$$

Первый из них описывает особенности энергообмена между сопряженными формами $\cos s_1y \sin\lambda x$ и $\sin s_1y \sin\lambda x$, второй — между формами $\cos s_2y \sin\lambda x$ и $\sin s_2y \sin\lambda x$. Нетрудно показать, что если начальные условия $u_k = u_k(0)$ $(k = \overline{1,4})$ подобраны так, что

$C_1 = 0$, то наложение сопряженных форм $\cos s_1 y \sin \lambda x$ и $\sin s_1 y \sin \lambda x$ обусловит деформирование оболочки по типу стоячая волна [1, 2]. Такой же результат будет иметь место и при $C_2 = 0$. В противном случае (при $C_1 \neq 0$ или $C_2 \neq 0$) взаимодействие и наложение каждой из пар сопряженных форм приведет к реализации бегущей, распространяющейся в окружном направлении, изгибной волны.

Представленные выше интегралы позволяют понизить порядок системы (13), из которой получаем еще один, более общий, интеграл вида

$$T_3(K_2^2 + K_3^2 + K_4^2 + K_5^2) + N_1 A_1^2 + N_2 A_1^4 = C_3 = \text{const}. \tag{18}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{4T_3}{\gamma_2}(\Delta_0 + 2T_6 C_0 (T_4 - 3T_3)); \\ N_2 &= \frac{4T_3}{\gamma_2^2}(3T_3(3T_6 - T_1) + T_6(3T_3 - T_4)); \qquad \Delta_0 = \omega_1^2 - \omega_2^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Этот интеграл, в отличие от (16) и (17), описывает энергетическую связанность при колебаниях системы оболочка — жидкость между амплитудным параметром колебаний A_1, с одной стороны, и фазовыми сдвигами всех обобщенных координат f_k ($k = \overline{1,4}$) — с другой. Эти сдвиги определяются функциями времени K_1, K_2, K_3, K_4. Физически они становятся наглядными, если решение исходных уравнений (6) представить в традиционной форме [9]

$$f_k = a_k \cos(\omega t + \vartheta_k) \tag{20}$$

с использованием в качестве неизвестных величин амплитуд a_k и фаз ϑ_k.

Таким образом, получен ряд аналитических соотношений, на основании которых могут быть исследованы основные закономерности многомодовых колебаний заполненных жидкостью композитных оболочек, имеющих близкие собственные частоты. Аналогичные соотношения могут быть получены и в случае кратных частот, когда $\omega_1 \approx 2\omega_3$ или $\omega_1 \approx \omega_3/2$.

4. Рассмотрим численный пример. Пусть заполненная водой ($\rho_0 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3) оболочка характеризуется параметрами

$$\begin{aligned} &E_1 = 2{,}15 \cdot 10^9 \text{ Па}; \qquad E_2 = 1{,}23 \cdot 10^9 \text{ Па}; \qquad G = 0{,}21 \cdot 10^9; \qquad \mu_1 = 0{,}19; \\ &\rho = 1{,}65\rho_0; \qquad \frac{h}{R} = 3{,}125 \cdot 10^{-3}; \qquad \frac{l}{R} = 2{,}495; \qquad R = 0{,}16 \text{ м}. \end{aligned} \tag{21}$$

Эта оболочка будет иметь две близкие собственные частоты (ω_1 и ω_3), отвечающие формам с волновыми параметрами $m = 1$, $n_1 = 5$ и $m = 1$, $n_2 = 7$; $\omega_1 = 60{,}42$ рад/с; $\omega_3 = 59{,}58$ рад/с.

На рис. 2 приведены типичные, полученные путем численного интегрирования уравнений (13) при различных начальных условиях для $u_k(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi/\omega)$, фазовые траектории колебательных процессов, характеризующие специфику энергообмена между модами оболочки, которым отвечают частоты ω_1 и ω_3. Здесь обозначено $\overline{A_i} = A_i/h$, $\dot{\overline{A_i}} = \dot{A_i}/h$ $(i = 1, 2)$. Траектории *1* и *2* характеризуют соответственно зависимости $\dot{\overline{A_1}} = \dot{\overline{A_1}}(\overline{A_1})$ и $\dot{\overline{A_2}} = \dot{\overline{A_2}}(\overline{A_2})$. Рис. 2, *а* построен при $K_1(0) = K_6(0) = 0$; рис. 2, *б* — при $K_1(0) = 0$, $K_6(0) = 3/4 \cdot h^2$; рис. 2, *в* — при $K_1(0) = 3/4 \cdot h^2$, $K_6(0) = 0$; рис. 2, *г* — при $K_1(0) = K_6(0) = 3/4 \cdot h^2$.

Качественно иным будет характер взаимодействия форм для заполненной жидкостью ортотропной оболочки при отсутствии внутренних резонансов. В этом случае уравнения

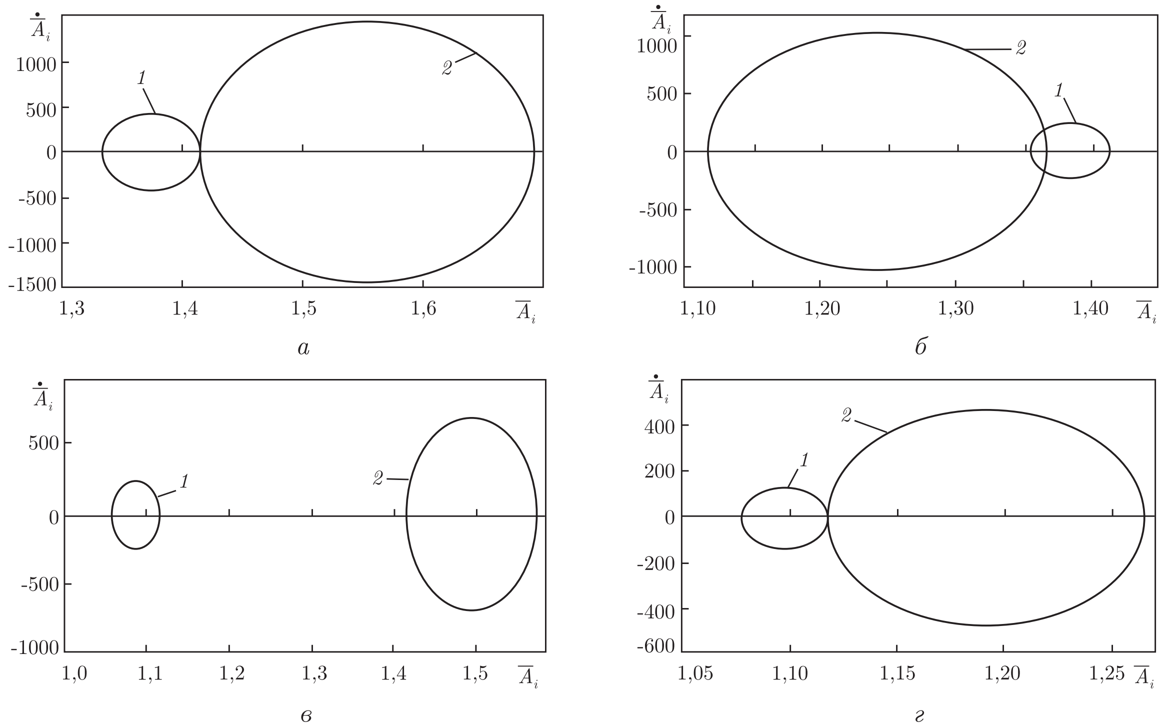

Рис. 2

для определения функций u_1–u_4 не будут связаны с уравнениями для определения функций u_5–u_8, поскольку в системе (13) постоянные параметры $T_3 = T_6 = \overline{T_1} = \overline{T_4} = 0$. Фазовые траектории $\dot{A}_1(A_1)$ не будут зависеть от фазовых траекторий $\dot{A}_2(A_2)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ГФФИ Министерства образования и науки Украины (проект Ф10/36–2005).

1. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев: Наук. думка, 1984. – 220 с.
2. *Kubenko V. D., Kovalchuk P. S., Kruk L. A.* Non-linear interaction of bending deformations of free oscillating cylindrical shells // J. of Sound and Vibration. – 2003. – **265**. – P. 245–268.
3. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Бояршина Л. Г. и др.* Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость. – Киев: Наук. думка, 1992. – 184 с.
4. *Ковальчук П. С., Крук Л. А.* О нелинейном энергообмене между собственными формами круговых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при их свободных колебаниях // Прикл. мех. – 2000. – **36**, № 1. – С. 115–122.
5. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
6. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – Москва: Наука, 1979. – 320 с.
7. *Amabili M., Pellicano F., Vakakis A. F.* Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid-filled circular cylindrical shells. Part 1: Equations of motion and numerical results // J. of Vibration and Acoustics. – 2000. – **122**. – P. 346–354.
8. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Крук Л. А.* О многомодовых нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // Прикл. мех. – 2003. – **39**, № 1. – С. 85–94.
9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1974. – 504 с.
10. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 11.09.2006