ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

4 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А. К. Бахтин, В. Е. Вьюн

Разделяющее преобразование и неравенства для открытых множеств

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины П. М. Тамразовым)

The extremal problems of the theory of univalent functions are studied. Some known results concerning the extremal problems with free poles for nonoverlapping domains are extended to the special classes of open sets.

Работа посвящена решению новых экстремальных задач геометрической теории функций комплексного переменного на классах неналегающих областей или открытых множеств (см. [1–9]).

Всюду ниже n — натуральное число, $n \geqslant 2$. В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим множество точек $A_{n,2} = \{a_{k,p}\colon k = \overline{1,n},\ p = 1,2\}$ такое, что $0 = \arg a_{1,1} = \arg a_{1,2} < \arg a_{2,1} = \arg a_{2,2} < \cdots < \arg a_{n,1} = \arg a_{n,2} < 2\pi$ (такие множества будем называть $(n,2)$-лучевыми системами точек). Пусть $\alpha_k := (1/\pi)(\arg a_{k+1,1} - \arg a_{k,1})$ при $k = \overline{1, n-1}$, $\alpha_k := (1/\pi)(2\pi - \arg a_{n,1})$, $\Lambda_k := \{w \in \mathbb{C}\colon \arg a_{k,1} \leqslant \arg w \leqslant \arg a_{k,1} + \pi\alpha_k\}$, $z_k(w)$ — однозначная ветвь функции $-i(e^{-i\arg a_{k,1}}w)^{1/\alpha_k}$, которая реализует однолистное конформное отображение области Λ_k на полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ $(k = \overline{1,n})$. Обозначим $\chi(t) := (1/2)(t + t^{-1})$ $(t \neq 0)$,

$$L(A_{n,2}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{1/(2\alpha_k)}\right)|a_{k,p}|,$$

$$L_p(A_{n,2}) := \prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{1/(2\alpha_k)}\right)|a_{k,p}|, \qquad p = 1,2,$$

и определим действительное число $\rho_k > 0$ следующим условием: точки $z_k(a_{k,1})$, $z_k(a_{k,2})$, $z_k(a_{k+1,1})$, $z_k(a_{k+1,2})$ переводятся дробно-линейным автоморфизмом расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ соответственно в точки $-i\rho_k^{1/\alpha_k}$, $-i\rho_k^{-1/\alpha_k}$, $i\rho_k^{1/\alpha_k}$, $i\rho_k^{-1/\alpha_k}$ $(k = \overline{1,n})$. Легко видеть, что последовательность $\{\rho_k\}_{k=1}^{n}$ определена однозначно (см., напр., [7]). Пусть

$$t_0 := \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1-\rho_k^{2/\alpha_k}}{1+\rho_k^{2/\alpha_k}}\right)^{1/n}, \qquad R^0 := \left[\frac{1-t_0}{1+t_0}\right]^{1/n}.$$

Рассмотрим открытое множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющее следующему условию частичного неналегания относительно множества $A_{n,2}$: $A_{n,2} \subset D$ и для каждого $k = 1, \ldots, n$, и для любых точек z_1, $z_2 \in A_{n,2} \bigcap \Lambda_k$, $z_1 \neq z_2$, связная компонента множества $D \bigcap \Lambda_k$, содержащая точку z_1, не пресекается со связной компонентой множества $D \bigcap \Lambda_k$, содержащей точку z_2 (см. [8, 9]).

Используемые в дальнейшем определения внутреннего радиуса $r(B, a)$ области B относительно содержащейся в ней точки a, квадратичного дифференциала, обобщенной функции Грина $g_B(z, w)$ области B, конденсатора и связанные с ним понятия его емкости и модуля содержатся, например, в [1–3, 5]. Если B — открытое (не обязательно связное) множество, $a \in B$, $B(a)$ — содержащая точку a связная компонента множества B, то $r(B, a) := r(B(a), a)$,

$$\widetilde{g}_B(w, a) := \begin{cases} g_{B(a)}(w, a), & w \in B(a), \\ \overline{\lim\limits_{\zeta \to w}} g_{B(a)}(\zeta, a), & w \in \partial B(a) \qquad (\zeta \in B(a)), \\ 0, & w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(a)}. \end{cases}$$

Во введенных выше обозначениях справедлива следующая

Теорема. *Пусть $n \geqslant 2$. Тогда каковы бы ни были $(n, 2)$-лучевая система точек $A_{n,2}$ такая, что $L(A_{n,2}) = 1$, и открытое множество $D \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющее условию частичного неналегания относительно множества $A_{n,2}$, имеет место неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \prod_{\substack{z_1, z_2 \in A_{n,2}, \\ z_1 \neq z_2}} \exp \widetilde{g}_D(z_1, z_2) \leqslant 2^{2n} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2 \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1-\rho_k^{2/\alpha_k}}{1+\rho_k^{2/\alpha_k}}\right)^2, \tag{1}$$

знак равенства в котором достигается, когда $A_{n,2}$ и D являются, соответственно, множеством полюсов и объединением круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+1)^2}{(w^n - (R^0)^n)^2 (1 - (R^0)^n w^n)^2} dw^2.$$

Эта теорема обобщает некоторые результаты о неналегающих областях, установленные в работах [6, 7].

Доказательство следует схеме, предложенной в работах [8, 9] и использует идеи и методы работ [3–7].

Из условий, наложенных на множество D, следует, что функция $\widetilde{g}_D(z, w)$ определена при всех z, $w \in D$ и конечна при всех $z \neq w$.

Пусть $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$, $\varepsilon > 0$, $E_1(\varepsilon)$ — замкнутая ε-окрестность множества $A_{n,2}$. Емкость конденсатора $C(\varepsilon)$, определяемого парой пластин E_0, $E_1(\varepsilon)$, равна

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon) := \inf \iint \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right) dxdy,$$

где точная нижняя грань берется по всем вещественным непрерывным функциям φ, определенным в $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющим в $\mathbb{C}$ условию Липшица (с показателем 1) и таким, что $\varphi\big|_{E_0} = 0$, $\varphi\big|_{E_1(\varepsilon)} = 1$. Величина $|C(\varepsilon)| := [\operatorname{cap} C(\varepsilon)]^{-1}$ называется модулем конденсатора $C(\varepsilon)$.

Следуя работам В. Н. Дубинина (см., напр., [3]), определим разделяющее преобразование конденсатора $C(\varepsilon)$ относительно системы функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$ и системы областей $\{\Lambda_k\}_{k=1}^n$. Пусть $C_k(\varepsilon) = \{E_0^{(k)}, E_1^{(k)}(\varepsilon)\}$, где $E_0^{(k)}$ — объединение образа множества $E_0 \bigcap \overline{\Lambda}_k$ при отображении $z = z_k(w)$ с симметричным ему множеством относительно мнимой оси, а $E_1^{(k)}(\varepsilon)$ — объединение образа множества $E_1(\varepsilon) \bigcap \overline{\Lambda}_k$ при том же отображении с симметричным ему множеством относительно мнимой оси ($k = \overline{1, n}$). Тогда (см. [4, 5]) выполняются неравенства

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} C_k(\varepsilon) \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\big|C(\varepsilon)\big| \leqslant 2 \left(\sum_{k=1}^{n} \big|C_k(\varepsilon)\big|^{-1} \right)^{-1}. \tag{3}$$

Применяя теорему 1 из работы [4], получаем асимптотическое равенство

$$\big|C(\varepsilon)\big| = \frac{1}{4\pi n} \log \frac{1}{\varepsilon} + M(D, A_{n,2}) + o(1), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

где $M(D, A_{n,2})$ — приведенный модуль множества D относительно системы точек $A_{n,2}$:

$$M(D, A_{n,2}) = \frac{1}{8\pi n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{2} \log r(D, a_{k,p}) + \sum_{\substack{z_1, z_2 \in A_{n,2}, \\ z_1 \neq z_2}} \widetilde{g}_D(z_1, z_2) \right). \tag{5}$$

Объединение связной компоненты множества $z_k\big(\overline{\Lambda}_k \bigcap D\big)$, содержащей точку $\omega_{k,p}^{(1)} := z_k(a_{k,p})$, с образом ее симметричного отражения относительно мнимой оси, обозначим через $\Omega_{k,p}^{(1)}$. Аналогично, объединение связной компоненты множества $z_k\big(\overline{\Lambda}_k \bigcap D\big)$, содержащей точку $\omega_{k,p}^{(2)} := z_k(a_{k+1,p})$, с образом ее симметричного отражения относительно мнимой оси, обозначим через $\Omega_{k,p}^{(2)}$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\big|z_k(w) - z_k(a_{s,p})\big| = \frac{1}{\alpha_k} |a_{s,p}|^{(1/\alpha_k) - 1} \cdot |w - a_{s,p}| + o(1), \qquad w \to a_{s,p} \tag{6}$$

($k = \overline{1, n}$, $p = 1, 2$, $s = k$, $k + 1$). Нетрудно заметить, что

$$\big|\omega_{k,p}^{(1)} - \omega_{k,p}^{(2)}\big| = |a_{k,p}|^{1/\alpha_k} + |a_{k+1,p}|^{1/\alpha_k}, \qquad k = \overline{1, n}, \qquad p = 1, 2. \tag{7}$$

Используя (6) и применяя теорему 1 из работы [4], получаем асимптотические равенства

$$\big|C_k(\varepsilon)\big| = \frac{1}{8\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} + M_k(D, A_{n,2}) + o(1), \qquad \varepsilon \to 0 \tag{8}$$

$(k = \overline{1,n})$, где

$$M_k(D, A_{n,2}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{16}\sum_{p=1}^{2}\log\frac{r\bigl(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\bigr)}{\dfrac{1}{\alpha_k}|a_{k,p}|^{(1/\alpha_k)-1}}\frac{r\bigl(\Omega_{k,p}^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)}\bigr)}{\dfrac{1}{\alpha_k}|a_{k+1,p}|^{(1/\alpha_k)-1}}. \qquad (9)$$

Производя необходимые вычисления с учетом [2–9], из (3) получаем неравенство

$$M(D, A_{n,2}) \leqslant \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{n,2})$$

и, следовательно,

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \prod_{\substack{z_1, z_2 \in A_{n,2},\\ z_1 \neq z_2}} \exp\widetilde{g}_D(z_1, z_2) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \cdot L(A_{n,2}) \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{2}\frac{r\bigl(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\bigr)\cdot r\bigl(\Omega_{k,p}^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)}\bigr)}{\bigl|\omega_{k,p}^{(1)} - \omega_{k,p}^{(2)}\bigr|^2}\right)^{1/2}.$$

Отсюда, повторяя рассуждения из работы [7], приходим к неравенству (1).

Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Сформулируем два следствия, вытекающие из доказанной теоремы. Для формулировки первого из них, введем обозначения: $\lambda_1 := [L_1(A_{n,2})]^{1/n}$, $\lambda_2 := [L_2(A_{n,2})]^{1/n}$. Определим $(n,2)$-лучевую систему точек $\widetilde{A}_{n,2}$ равенствами $\widetilde{a}_{k,p} = \lambda_p \cdot (a_{k,p}/|a_{k,p}|)$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$. Если c — действительное положительное число и $A \subset \mathbb{C}$, то $cA := \{z = cw\colon w \in A\}$.

Следствие 1. *Пусть $n \geqslant 3$, λ, R — положительные действительные числа, $\lambda < R$. Тогда для любой $(n,2)$-лучевой системы точек $A_{n,2} = \{a_{k,p}\colon k = \overline{1,n},\ p = 1,2\}$ такой, что*

$$L(A_{n,2}) = R^{2n}, \qquad L_1(A_{n,2}) = \lambda^n, \qquad t_0\left(\frac{1}{R}A_{n,2}\right) = t_0\left(\frac{1}{R}\widetilde{A}_{n,2}\right),$$

и для произвольного открытого множества $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего условию частичного неналегания относительно системы точек $A_{n,2}$, выполняется неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \prod_{\substack{z_1, z_2 \in A_{n,2},\\ z_1 \neq z_2}} \exp\widetilde{g}_D(z_1, z_2) \leqslant \left(\frac{4R}{n}\right)^{2n} \cdot \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right]^{2n},$$

знак равенства в котором достигается, когда точки $a_{k,p}$ и множество D являются, соответственно, полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)^2}{(w^n - \lambda^n)^2(R^{2n} - \lambda^n w^n)^2}dw^2.$$

Функционал $t_0(A_{n,2})$, определенный на $(n,2)$-лучевых системах точек, можно распространить на являющиеся подмножествами круга $|z| < 1$ т. н. n-лучевые системы точек A_n, т. е. множества из n различных точек в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ с попарно различными аргументами, а именно, полагая $t_0(A_n)$ равным значению функционала t_0 на $(n,2)$-лучевой системе, которая состоит из объединения множества A_n с симметричным ему множеством относительно окружности $|z|=1$. По аналогии с введенными выше обозначениями для $(n,2)$-лучевых систем, для заданной n-лучевой системы $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ определяем n-лучевую систему $\widetilde{A}_n:=\{\widetilde{a_k}\}_{k=1}^n$. Будем говорить, что открытое множество $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяет условию частичного неналегания относительно n-лучевой системы $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $a_{n+1}:=a_1$, $\arg a_{n+1}:=2\pi$, если для каждого $k=1,\ldots,n$ компоненты связности множества $D\bigcap\{w\in\mathbb{C}\colon \arg a_k\leqslant \leqslant\arg w\leqslant\arg a_{k+1}\}$, содержащие точки a_k и a_{k+1}, не пересекаются между собой. Обозначим $U_R:=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<R\}$.

Следствие 2. *Пусть $n\geqslant 3$, λ и R — положительные действительные числа, $\lambda<R$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что*

$$L(A_n)=\lambda^n,\qquad t_0\left(\frac{1}{R}A_n\right)=t_0\left(\frac{1}{R}\widetilde{A}_n\right),$$

и для любого открытого множества $D\subset U_R$, удовлетворяющего условию частичного неналегания относительно системы точек A_n, справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r(D,a_k)\prod_{\substack{z_1,z_2\in A_{n,2},\\ z_1\neq z_2}}\exp\widetilde{g}_D(z_1,z_2)\leqslant\left(\frac{4\lambda}{n}\right)^n\cdot\left[\frac{R^n-\lambda^n}{R^n+\lambda^n}\right]^n.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки a_k и множество D являются, соответственно, принадлежащими кругу U_R полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(w^n+R^n)}{(w^n-\lambda^n)^2(R^{2n}-\lambda^n w^n)^2}dw^2.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы Украины № 0105U000435.

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
2. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
3. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1. – (295). – С. 3–76.
4. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1997. – **237**. – С. 56–73.
5. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учебн. пособие. – Владивосток: Изд. Дальневост. ун-та, 2003. – 116 с.
6. *Емельянов Е. Г.* О связи двух задач об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 91–98.
7. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на двух окружностях // Доп. НАН України. – 2005. – № 7. – С. 12–16.
8. *Бахтин А. К.* Приведенные модули открытых множеств и экстремальные задачи со свободными полюсами // Доп. НАН України. – 2006. – № 5. – С. 7–13.
9. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 7–13.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 08.11.2006