Теорема 4. *Для довільного T_χ група автоморфізмів групи A_χ ізоморфна групі автоморфізмів групи S_χ.*

1. *Lavrenyuk Ya. V., Sushchansky V. I.* Automorphisms of homogeneous symmetric groups and hierarchomorphisms of rooted trees // Algebra and Discrete Mathematics. – 2003. – **2**, No 4. – P. 33–49.
2. *Lavrenyuk Y. V., Sushchansky V. I.* Notes to "automorphisms of homogeneous symmetric groups and hierarchomorphisms of rooted trees" // Ibid. – 2005. – **4**, No 2. – P. 70–72.
3. *Лавренюк Я.В.* Класифікація індуктивних границь з діагональними зануреннями скінченних симетричних та знакозмінних груп // Доп. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 24–27.
4. *Rubin M.* On the reconstruction of topological spaces from their groups of homeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **312**, No 2. – P. 487–538.
5. *Nekrashevych V.* Self-similar groups. AMS: Mathematical Surveys and Monographs. – 2005. – Vol. 117. – 231 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 13.09.2006

УДК 512.4

Ю. Г. Леонов

Критерий промежуточного роста самоподобных групп

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

A new method for the upper estimation of growth for some infinite groups of the automorphisms of trees is investigated. A criterion which distinguishes when a group has exponential growth or subexponential is established.

В 1968 г. Дж. Милнор [1] поставил вопрос о существовании групп, у которых функция роста растет быстрее любой степенной функции и медленнее показательной. Такие группы называются группами промежуточного роста.

Напомним, что функция роста конечно порожденной группы G с системой порождающих S определяется соотношением

$$\gamma(n) = \#\{g \in G;\, l(g) \leqslant n\},$$

где $l(g)$ — длина элемента g относительно S.

Будем говорить, что функция $f_1(n)$ растет не быстрее, чем $f_2(n)$: $f_1(n) \preceq f_2(n)$, если найдется $c > 0$ такое, что $f_1(n) \leqslant f_2(cn)$, для любых $n \in \mathbb{N}$. Если $f_1(n) \preceq f_2(n)$ и $f_2(n) \preceq f_1(n)$, то функции эквивалентны: $f_1(n) \sim f_2(n)$. Функции роста одной и той же конечно порожденной группы при различных конечных системах порождающих эквивалентны.

В работе [2] Р. И. Григорчук показал, что группа из [3] Gr имеет промежуточный рост, тем самым ответив на вопрос Милнора. Исследуя функции роста группы, мы часто можем узнать другие важнейшие ее характеристики. Так, если группа G растет медленнее, чем экспоненциальная функция (растет субэкспоненциально), т. е. выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\gamma_G(n)}=1,$$

то G является аменабельной, а если медленнее какой-либо степенной функции, то G почти нильпотентна [4]. Таким образом, при исследовании роста бесконечных не почти нильпотентных групп наиболее важным является вопрос: растет ли группа экспоненциально или субэкспоненциально.

В данной работе мы устанавливаем критерий субэкспоненциального роста самоподобных групп. Полученные результаты применяются к известным группам. Прежде чем формулировать основной результат, сделаем ряд определений.

Группа G, действующая на бесконечном регулярном корневом d-дереве T_d (от каждой вершины вниз исходит ровно d ребер), называется самоподобной, если множество ограничений действий ее элементов на каждом поддереве совпадает с G.

Класс самоподобных групп изучается не так давно (см., напр., [5]). Однако и на сегодняшний день среди самоподобных групп известно много групп с уникальными свойствами. Так, среди таких групп находятся наиболее простые примеры групп Бернсайдова типа (периодических бесконечных конечно порожденных групп). Таковыми являются и группа Григорчука Gr и известные p-группы Гупты–Сидки [6].

Будем говорить, что вершина v дерева $T=T_d$ находится на уровне $n>0$, если эта вершина удалена от корневой вершины на расстоянии n. Регулярное корневое дерево T_v с корневой вершиной v является поддеревом дерева T и совпадает с ним после отождествления корневых вершин этих деревьев. Ясно, что число деревьев с корневой вершиной уровня n равно d^n. Множество вершин уровня n обозначим $V^{(n)}$.

Пусть $g\in G$. Сужение действия элемента g на поддерево дерева T с корневой вершиной v назовем проекцией элемента g и обозначим g_v. Будем говорить, что конечно порожденная самоподобная группа G не имеет растягивания, если для некоторой системы порождающих S выполняется неравенство

$$l(g)\geqslant\sum_{v\in V^{(1)}}l(g_v), \tag{1}$$

для всех $g\in G$. Большинство известных самоподобных групп не имеют растягивания.

Предметом нашего исследования является изучение роста множества

$$\Gamma_G(n)=\{g\mid l(g)\leqslant n\}.$$

Рассмотрим граничное множество элементов длины $\leqslant n$ для некоторого натурального k:

$$\overline{\Gamma}_G^{\{k\}}(n)=\left\{g\in\Gamma_G(n)\mid l(g)=\sum_{v\in V^{(k)}}l(g_v)\right\}.$$

Его мощность обозначим $f_G^{\{k\}}(n)$ и назовем функцией роста граничного множества. Оказывается рост граничного множества очень тесно связан с ростом самой группы G.

Теорема 1. *Пусть G — самоподобная группа, которая не имеет растягивания и $f_G^{\{k\}}(n)$ — функция роста граничного множества. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_G^{\{k\}}(n)}=1$, для некоторого k, то группа G растет субэкспоненциально.*

Фактически эта теорема является критерием, так как в обратную сторону утверждение очевидно для любого k.

Зафиксируем $\alpha \in (0,1)$ и рассмотрим разбиение множества $\Gamma_G(n)$ на два дизъюнктных подмножества:

$$\Gamma_1^{\{k\}}(\alpha, n) = \left\{ g \in \Gamma_G(n) \mid (1-\alpha) l(g) \geqslant \sum_{v \in V^{(k)}} l(g_v) \right\},$$

$$\Gamma_2^{\{k\}}(\alpha, n) = \Gamma_G(n) \setminus \Gamma_1^{\{k\}}(\alpha, n).$$

Если в группе G при некоторых k и $\alpha > 0$ множество $\Gamma_2^{\{k\}}(\alpha, n)$ ограничено с ростом n, то говорят, что группа G имеет стягивание. В частности, группа Григорчука Gr имеет стягивание. Для групп со стягиванием хорошо известен метод оценки роста сверху, который впервые был указан в [2]. Простое доказательство субэкспоненциального роста групп со стягиванием получено в [7]. А именно, пусть для группы G найдется $\lambda \in (0,1)$, для которого выполняется неравенство

$$\sum_{v \in V^{(k)}} l(g_v) \leqslant \lambda l(g) + \mathrm{const}.$$

Тогда группа G имеет субэкспоненциальный рост с оценкой

$$\gamma_G(n) \leqslant e^{n^\delta}, \qquad \text{где} \qquad \delta = \log_{d/\lambda^{1/k}} d.$$

Для доказательства нашей теоремы необходимо обобщить полученный метод для неограниченно растущего множества $\Gamma_2^{\{k\}}(\alpha, n)$ с ростом n. Основным техническим результатом можно считать следующий:

Лемма 1. *Для каждого $\alpha \in (0,1)$ и самоподобной группы $G \leqslant \operatorname{Aut} T_d$ со свойством* (1) *верна оценка*

$$\gamma_G(n) \leqslant \max\left\{ R_1^{n^\delta}, \left(R_2 \cdot f_G^{\{k\}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\alpha \cdot n} \right\}, \tag{2}$$

где $\delta = \log_{d/(1-\alpha)^{1/k}} d$ и R_1, R_2 — некоторые константы > 1.

Далее, мы имеем возможность рассматривать разбиение множества $\Gamma_G(n) = \Gamma_1^{\{k\}}(\alpha_n, n) \bigcup \Gamma_2^{\{k\}}(\alpha_n, n)$ при различных $\alpha_n \in (0,1)$ с ростом n, переразбивая с каждым n наше множество.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ монотонно стремится к 0 и выполняется условие теоремы о росте функции $f_G^{\{k\}}(n)$. Тогда функция*

$$\left(R_2 \cdot f_G^{\{k\}}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\right)^{\alpha_n \cdot n}$$

растет субэкспоненциально. Если, кроме этого, $\{\alpha_n\}$ стремится к 0 так медленно, что

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha_n \cdot \log n) = \infty,$$

то и функция $R_1^{n^{\delta_n}}$ растет субэкспоненциально, при $\delta_n = \log_{d/(1-\alpha_n)^{1/k}} d$.

Выбирая необходимую последовательность α_n, мы можем добиться выполнения предыдущей леммы. Отсюда и из леммы 1 получаем, что функция $\gamma_G(n)$ растет субэкспоненциально. Последнее доказывает нашу теорему.

Исследовать граничное множество самоподобной группы гораздо легче самой группы. В качестве приложения нашей теоремы для группы с бесконечным граничным множеством отметим следующий результат.

Лемма 3. *Пусть G_3 — 3-группа, построенная в работе* [6]. *Тогда функция роста граничного множества этой группы растет субэкспоненциально уже при $k = 2$:*

$$f_{G_3}^{\{2\}}(n) \leqslant e^{n^{8/9}}.$$

Аналогичного вида оценку $f_G^{\{k\}}(n) \leqslant e^{n^\theta}$ при $\theta < 1$ можно получить и для некоторых других известных групп. В частности, для известной группы Гупты, действующей на дереве T_4, можно выбрать $\theta = 1/2$ при $k = 1$.

Заметим, что для самоподобных групп экспоненциального роста, как правило, легко доказать экспоненциальный рост ее граничного множества.

1. *Milnor J.* Problem 5603 // Amer. Math. Mon. – 1968. – **75**, No 6. – P. 685–686.
2. *Григорчук Р. И.* Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1984. – № 5. – С. 939–985.
3. *Григорчук Р. И.* К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и его приложения. – 1980. – **14**, вып. 1. – С. 53–54.
4. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps // Publ. Math. IHES. – 1981. – **53**. – P. 53–73.
5. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2000. – **231**. – С. 134–214.
6. *Гупта Н., Сидки С.* Some infinite p-groups // Алгебра и логика. – 1983. – **22**, № 5. – С. 584–589.
7. *Леонов Ю. Г.* Про оцінку функції росту для деяких самоподібних груп // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2004. – № 3. – С. 32–34.

Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова

Поступило в редакцию 03.10.2006