



УДК 534.232.001.62.50

© 2007

Член-корреспондент НАН України А. Е. Божко, В. А. Пушня

## Особенности динамики подвижной системы электромагнитного вибростенда

*The peculiarities of the motion of the traveling system of an electromagnetical bench under the conditions of different dispositions of the inertia center and the main center of system's hard elements are shown.*

Применение электромагнитных вибровозбудителей ЭМВ в качестве источников вибраций в различных технологических процессах, испытательных вибростендах известно [1, 2]. Но динамика электромагнитных вибростендов (ЭМВС) до настоящего времени не рассматривалась в таком аспекте, как это сделано в данной работе. Некоторые взгляды на подобное решение были изложены для электродинамических вибростендов (ЭДВС) в работе [2]. Однако ЭДВС существенно отличаются от ЭМВС. Для уяснения существа вопроса представим на рис. 1 электромагнитомеханическую схему ЭМВС, где 1 — магнитопровод; 2 — якорь (подвижная часть); 3 — испытуемый объект; 4–6 — пружины; 7 — электрическая катушка; 8 — реактивная масса;  $U$  — входное задающее напряжение;  $\delta$  — воздушный зазор; 9 — корпус.

Колебания подвижной системы ЭМВС возникают из-за действия переменного по форме тягового усилия  $F$ , которое появляется в результате наведения в магнитной системе  $1 \rightarrow \delta \rightarrow 2 \rightarrow \delta \rightarrow 1$  переменного магнитного потока  $\Phi$ , притягивающего якорь 2 совместно с объектом 3 к полюсам магнитопровода 1. Пружины 4, 5 отталкивают якорь 2 от магнитопровода 1. Магнитный поток  $\Phi$  создается током  $i$ , идущим по катушке 7 и образованном переменным напряжением  $U$  и параметрами электрической цепи ЭМВС.

Вначале рассмотрим особенности движения якоря 2 совместно с испытуемым объектом 3 вне зависимости от внешних сил, электрических и магнитных сил, равных нулю, что соответствует разомкнутой катушке 7. Для этого изобразим на рис. 2 динамическую модель колебаний подвижной части (2 + 3).

Центр координат  $O$ , считаем, находится в центре масс  $O_1$  подвижной системы. Оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  совпадают с главными центральными осями инерции системы (2 + 3) в состоянии покоя. Комплекс пружин 4, 5, называемый подвесом, представим в виде четырех упругих элементов, расположенных на взаимно перпендикулярных направлениях с координатами  $(x_i, y_i, z_i, i = \overline{1,4})$ .

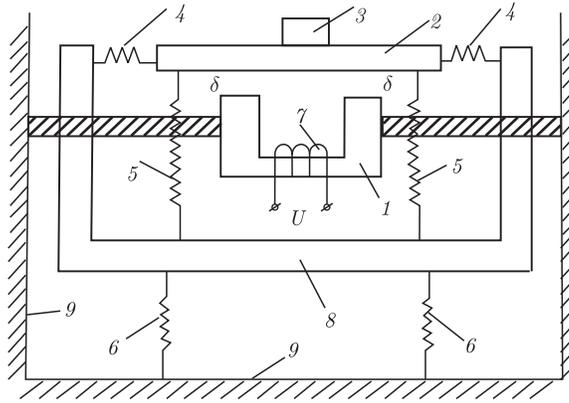


Рис. 1

Пружины (упругие элементы) также представим в виде трех составляющих, ориентированных параллельно осям  $0_1x_1, 0_1y_1, 0_1z_1$ . При этом положим, что упругая сила каждой составляющей упругого элемента пропорциональна его деформации и направлена вдоль оси соответствующего элемента. Как видно из рис. 2, подвижная часть обуславливает перемещения своего центра масс вдоль осей  $0x, 0y, 0z$  и вращательные движения вокруг этих осей. Для исключения громоздкости в решении задачи предположим, что перемещения  $(2+3)$  вдоль одной оси не оказывает влияния на перемещения  $(2+3)$  по другим осям. Обозначим через  $\alpha, \beta, \gamma$  углы поворота вокруг осей  $0x, 0y, 0z$  соответственно и направление вращательного движения примем положительным по часовой стрелке.

С достаточной точностью можем считать, что перемещения  $(2+3)$  линейны, а  $\alpha, \beta, \gamma$  малы. Тогда справедливы соотношения  $\sin l \approx l, \cos l \approx 1, l = \alpha, \beta, \gamma$ . Координаты точек крепления упругих элементов определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ix} &= x - y_i\gamma + z_i\beta, \\ \Delta_{iy} &= y - z_i\alpha + x_i\gamma, \\ \Delta_{iz} &= z - x_i\beta + y_i\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В соответствии с рис. 2 введем обозначения:  $K_x^i, K_y^i, K_z^i, i = \overline{1,4}$  — коэффициенты линейных жесткостей в направлении осей  $0_1x_1, 0_1y_1, 0_1z_1$ ;  $C_x^i, C_y^i, C_z^i, i = \overline{1,4}$  — коэффициенты крутильных жесткостей, соответствующие углам  $\alpha, \beta, \gamma$ ;  $m$  — масса  $(2+3)$ ;  $I_{x1}, I_{y1}, I_{z1}$  — моменты инерции подвижной системы  $(2+3)$  относительно осей  $0x_1, 0y_1, 0z_1$  соответственно; реакции составляющих упругих элементов по координатным осям  $0_1x_1, 0_1y_1, 0_1z_1$  —

$$H_x^i = k_x^i A_{ix}; \quad H_y^i = k_y^i A_{iy}; \quad H_z^i = k_z^i A_{iz}; \quad i = \overline{1,4}. \quad (2)$$

Моменты каждой составляющей упругих элементов, приведенные к точкам их крепления, для соответствующих углов  $\alpha, \beta, \gamma$  определяются так:

$$M_x^i = C_x^i \alpha; \quad M_y^i = C_y^i \beta; \quad M_z^i = C_z^i \gamma; \quad i = \overline{1,4}. \quad (3)$$

В качестве обобщенных координат  $q^j$  подвижной системы якоря совместно с испытуемым объектом примем линейные и угловые перемещения  $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ , т.е.  $j = 6$ . Тогда кинематическая энергия ЭМВС, не считая реактивной массы  $\delta$ , запишется выражением

$$T = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 + I_x\dot{\alpha}^2 + I_y\dot{\beta}^2 + I_z\dot{\gamma}^2). \quad (4)$$

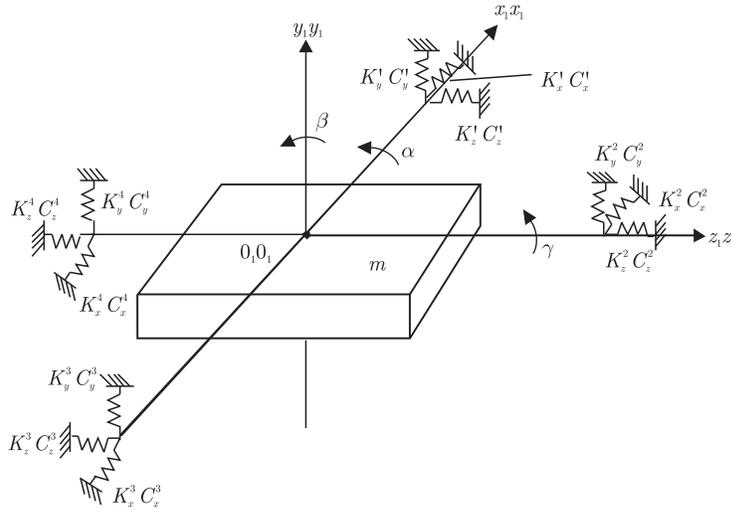


Рис. 2

Потенциальная энергия ЭМВС для четырех упругих элементов в системе (2 + 3) определяется соотношением

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^4 H_x^i \Delta_{ix} + \sum_{i=1}^4 H_y^i \Delta_{iy} + \sum_{i=1}^4 H_z^i \Delta_{iz} + \sum_{i=1}^4 M_x^i \alpha + \sum_{i=1}^4 M_y^i \beta + \sum_{i=1}^4 M_z^i \gamma \right)$$

или с учетом принятых обозначений для упругих сил (1) и моментов (2)

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^4 K_x^i (x - y_i \gamma + z_i \beta)^2 + \sum_{i=1}^4 K_y^i (y - z_i \alpha + x_i \gamma)^2 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^4 K_z^i (z - x_i \beta + y_i \alpha)^2 + \sum_{i=1}^4 C_\varepsilon^i \varphi^2 \right], \quad \varepsilon = x, y, z; \quad \varphi = \alpha, \beta, \gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Диссипативная функция для ЭМВС (без реактивной массы) определяется выражением

$$D = \frac{1}{2} (h_x \dot{x}^2 + h_y \dot{y}^2 + h_z \dot{z}^2 + h_\alpha \dot{\alpha}^2 + h_\beta \dot{\beta}^2 + h_\gamma \dot{\gamma}^2), \quad (6)$$

где  $h_x, h_y, h_z, h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$  — постоянные величины, соответствующие коэффициентам диссипации. Силы сопротивления определяются по формуле

$$Q_i = \frac{\partial D}{\partial q}, \quad i = \overline{1,4}; \quad j = \overline{1,6}. \quad (7)$$

На основании (7) и (6) проекции сил и моментов сопротивления на оси неподвижной системы координат будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} M_x &= h_\alpha \dot{\alpha} - h_\gamma \gamma \dot{\beta}, \\ M_y &= h_\beta \dot{\beta} - h_\gamma \gamma \dot{\alpha}, \\ M_z &= h_\gamma \dot{\gamma} - h_\alpha \alpha \dot{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Подставляя полученные формулы (2)–(6), (8) в уравнения Лагранжа–Максвелла для механических систем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall j \in n^+; \quad i = \overline{1, 4},$$

где  $L = T - \Pi$ ;  $t$  — время, получим систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + h_x \dot{x} + k_{11}x + k_{15}\beta - k_{16}\gamma &= 0, \\ m\ddot{y} + h_y \dot{y} + k_{22}y - k_{24}\alpha + k_{26}\gamma &= 0, \\ m\ddot{z} + h_z \dot{z} + k_{33}z + k_{34}\alpha - k_{35}\beta &= 0, \\ I_x \ddot{\alpha} + h_\alpha \dot{\alpha} - k_{42}y + k_{43}z + k_{44}\alpha - k_{45}\beta - k_{46}\gamma &= 0, \\ I_y \ddot{\beta} + h_\beta \dot{\beta} - h_\gamma \dot{\alpha} + k_{51}x - k_{53}z - k_{54}\alpha + k_{55}\beta - k_{56}\gamma &= 0, \\ I_z \ddot{\gamma} + h_\gamma \dot{\gamma} - h_\alpha \dot{\alpha} - k_{61}x + k_{62}y - k_{64}\alpha - k_{65}\beta + k_{66}\gamma &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum_{i=1}^4 k_x^i; & k_{15} &= \sum_{i=1}^4 k_x^i z_i; & k_{16} &= \sum_{i=1}^4 k_x^i y_i; & k_{22} &= \sum_{i=1}^4 k_y^i; & k_{24} &= \sum_{i=1}^4 k_y^i z_i; \\ k_{26} &= \sum_{i=1}^4 k_y^i x_i; & k_{33} &= \sum_{i=1}^4 k_z^i; & k_{34} &= \sum_{i=1}^4 k_z^i y_i; & k_{35} &= \sum_{i=1}^4 k_z^i x_i; & k_{42} &= k_{24}; & k_{43} &= k_{34}; \\ k_{44} &= \sum_{i=1}^4 (c_x^i + k_y^i z_i^2 + k_z^i y_i^2); & k_{45} &= \sum_{i=1}^4 k_z^i x_i y_i; & k_{46} &= \sum_{i=1}^4 k_y^i z_i x_i; & k_{51} &= k_{15}; & k_{53} &= k_{35}; \\ k_{54} &= \sum_{i=1}^4 k_z^i x_i y_i; & k_{55} &= \sum_{i=1}^4 (c_y^i + k_z^i x_i^2 + k_x^i z_i^2); & k_{56} &= \sum_{i=1}^4 k_x^i y_i z_i; \\ k_{61} &= k_{16}; & k_{62} &= k_{26}; & k_{64} &= k_{46}; & k_{65} &= k_{56}; & k_{66} &= \sum_{i=1}^4 (c_z^i + k_x^i y_i^2 + k_y^i x_i^2). \end{aligned}$$

Полученная система дифференциальных уравнений 12-го порядка описывает движение подвижной системы (2 + 3) ЭМВС. Переменные в системе не разделяются, и перемещение одной из них вызывает перемещение остальных. Связь между координатами осуществляется упругими силами. Диссипативные силы не способствуют разделению координат.

Далее рассмотрим физический смысл коэффициентов, входящих в систему уравнений (9). Коэффициенты  $k_{11}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{33}$ , являясь линейными жесткостями, имеют совместно с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно размерность силы и представляют собой суммарные реакции упругих элементов при поступательном перемещении (2 + 3) в направлении одной из координатных осей. Коэффициенты  $k_{15}$ ,  $k_{16}$ ,  $k_{26}$ ,  $k_{35}$ ,  $k_{42}$ ,  $k_{43}$ ,  $k_{51}$ ,  $k_{53}$ ,  $k_{54}$ ,  $k_{61}$ ,  $k_{62}$  совместно с  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  имеют размерность момента и называются линейно-поворотными жесткостями. Коэффициенты  $k_{44}$ ,  $k_{55}$ ,  $k_{66}$  имеют размерность момента, отнесенного к угловому перемещению (2 + 3) и называются крутильными жесткостями. Коэффициенты  $k_{45}$ ,  $k_{46}$ ,  $k_{54}$ ,  $k_{56}$ ,  $k_{65}$  имеют размерность момента, отнесенного к поступательному перемещению (2 + 3) и называются гироскопическими жесткостями упругих элементов. В системе (9) все координаты связаны, и разделение колебаний получить в общем случае невозможно.

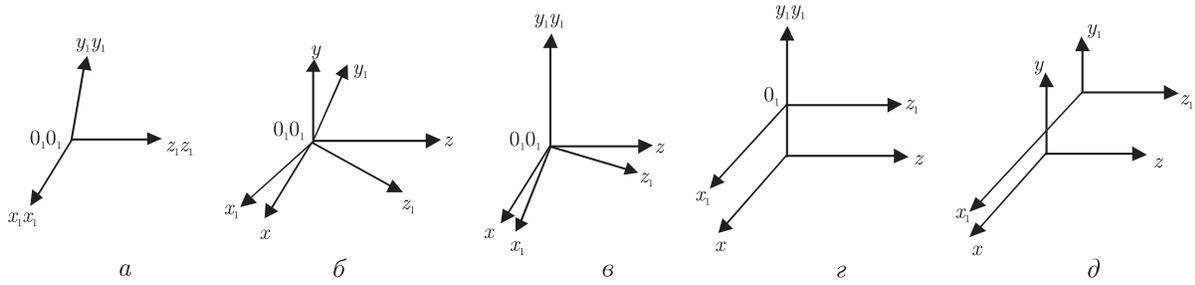


Рис. 3

Поскольку связанность координат определяется, в основном, упругими силами, а роль сил сопротивления невелика и сказывается лишь на величинах амплитуд связанных колебаний, то при рассмотрении случаев разделения переменных в уравнениях (9) пренебрежем коэффициентами демпфирования. Тогда (9) примет вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}x + k_{15}\beta - k_{16}\gamma &= 0, \\ m\ddot{y} + k_{22}y - k_{24}\alpha + k_{26}\gamma &= 0, \\ m\ddot{z} + k_{33}z + k_{34}\alpha - k_{35}\beta &= 0, \\ I_x\ddot{\alpha} - k_{42}y + k_{43}z + k_{44}\alpha - k_{45}\beta - k_{46}\gamma &= 0, \\ I_y\ddot{\beta} + k_{51}x - k_{53}z - k_{54}\alpha + k_{55}\beta - k_{56}\gamma &= 0, \\ I_z\ddot{\gamma} - k_{61}x + k_{62}y - k_{64}\alpha - k_{65}\beta + k_{66}\gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Так как при проектировании ЭМВС важно знать поведение (2 + 3), то необходимо уяснить вопросы разделения координат в системе уравнений, описывающих движения этой подвижной системы. Рассмотрим различные случаи разделения координат в (10).

*Случай 1.* Параметры упругих элементов подвеса (2 + 3) выбраны так, что главный центр жесткости системы и центр инерции совпадают. При этом главные оси жесткости совпадают с главными центральными осями инерции (рис. 3, а). Тогда

$$k_{15} = k_{16} = k_{24} = k_{26} = k_{34} = k_{35} = k_{42} = k_{43} = k_{51} = k_{53} = k_{61} = k_{62} = 0, \quad (11)$$

$$k_{45} = k_{46} = k_{54} = k_{56} = k_{64} = k_{65} = 0. \quad (12)$$

То есть линейно-поворотные и гироскопические жесткости равны нулю. С учетом этих условий уравнения движения (10) примут вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}x &= 0, \\ m\ddot{y} + k_{22}y &= 0, \\ m\ddot{z} + k_{33}z &= 0, \\ I_x\ddot{\alpha} + k_{44}\alpha &= 0, \\ I_y\ddot{\beta} + k_{55}\beta &= 0, \\ I_z\ddot{\gamma} + k_{66}\gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Система (13) является консервативной. В ней возможно полное разделение переменных  $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ , т.е. эти перемещения являются независимыми. Заметим, что при проектировании и изготовлении упругого подвеса (2 + 3) могут быть геометрические ошибки

и отклонения физических характеристик упругих элементов подвеса и случай 1 может быть нарушен. Тогда этот случай заменим двумя другими с неполной связанностью координат.

*Случай 2.* Главный центр жесткости (2+3) совпадает с центром инерции, но главные оси жесткости не совпадают с главными осями инерции (рис. 3, б). В этом случае выполняется только условие (11) и система (10) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}x &= 0, \\ m\ddot{y} + k_{22}y &= 0, \\ m\ddot{z} + k_{33}z &= 0, \\ I_x\ddot{\alpha} + k_{44}\alpha - k_{45}\beta - k_{46}\gamma &= 0, \\ I_y\ddot{\beta} + k_{55}\beta - k_{54}\alpha - k_{56}\gamma &= 0, \\ I_z\ddot{\gamma} + k_{66}\gamma - k_{64}\alpha - k_{65}\beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В уравнениях (14) поступательные перемещения  $x$ ,  $y$ ,  $z$  разделены, а вращательные  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  остаются связанными.

*Случай 3.* Главный центр жесткости совпадает с центром масс (2 + 3), главная ось жесткости  $0_1y_1$  совпадает с осью инерции  $0y$  (рис. 3, в), другие оси не совпадают. В этом случае условие (11) выполняется полностью, а условие (12) частично, т. е.  $k_{45} = k_{54} = k_{56} = k_{65} = 0$ . В результате (10) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}x &= 0, \\ m\ddot{y} + k_{22}y &= 0, \\ m\ddot{z} + k_{33}z &= 0, \\ I_\alpha\ddot{\alpha} + k_{44}\alpha - k_{46}\beta &= 0, \\ I_\beta\ddot{\beta} + k_{55}\beta &= 0, \\ I_\gamma\ddot{\gamma} + k_{66}\gamma - k_{64}\alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Здесь разделяются  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и вращательные относительно угла  $\beta$ .

Далее рассмотрим случаи, когда не достигается совпадение главного центра тяжести и центра масс (2 + 3). Такое положение возникает при асимметричном расположении на 2 объекта 3.

*Случай 4* (см. рис. 3, г). Главная центральная ось жесткости  $0_1 y_1$  совпадает с центральной осью инерции  $0y$ , а центральные оси жесткости  $0_1x_1$ ,  $0_1z_1$  не совпадают с  $0x$ ,  $0z$ . В этом случае условие (11) выполняется частично:  $k_{15} = k_{24} = k_{26} = k_{35} = k_{42} = k_{51} = k_{53} = k_{62} = 0$ . Условие (12) выполняется полностью. Тогда (10) примет вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}x - k_{16}\gamma &= 0, \\ m\ddot{y} + k_{22}y &= 0, \\ m\ddot{z} + k_{33}z + k_{34}\alpha &= 0, \\ I_x\ddot{\alpha} + k_{44}\alpha + k_{43}z &= 0, \\ I_y\ddot{\beta} + k_{44}\beta &= 0, \\ I_\gamma\ddot{\gamma} + k_{66}\gamma - k_{61}x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Здесь поступательное  $y$  и вращательное  $\beta$  перемещения разделяются по отношению к другим переменным. Перемещение  $x$  связано с вращательным  $\gamma$ , а  $z$  связано с  $\alpha$ . Таким образом,

в этом случае движение (2 + 3) распадается на независимые движения по координатам  $y$  и  $\beta$  и на связанные по координатам  $x$ ,  $\gamma$  и  $z$ ,  $\alpha$ .

*Случай 5* (рис. 3,  $\partial$ ). Главные центральные оси жесткости совпадают с главными, но не центральными осями инерции (2 + 3). Центр жесткости лежит в главной центральной плоскости инерции  $yOz$  ( $yOx$ ,  $xOz$ ). В этом случае условие (12) выполняется полностью, а условие (11) частично:  $k_{26} = k_{62} = k_{35} = k_{53} = 0$ . Система (10) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}x + k_{15}\beta - k_{16}\gamma &= 0, \\ m\ddot{y} + k_{22}y - k_{24}\alpha &= 0, \\ m\ddot{z} + k_{33}z + k_{34}\alpha &= 0, \\ I_x\ddot{\alpha} + k_{44}\alpha - k_{42}y + k_{43}z &= 0, \\ I_y\ddot{\beta} + k_{55}\beta + k_{51}x &= 0, \\ I_z\ddot{\gamma} + k_{66}\gamma - k_{61}x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Переменные в этой системе не разделяются, но образуют две группы трех связанных колебаний. В первой группе  $x$  неотделимо от  $\beta$  и  $\gamma$ . Во второй группе  $\alpha$  связано с  $y$  и  $z$ .

Итак, в результате рассмотрения представленных случаев (1–5) можно сделать следующий вывод. Если связь между всеми перемещениями в (2 + 3) сохраняется, то любая гармоника возмущающей силы может вызвать шесть резонансов подвижной системы ЭМВС. Если связь между координатами ограничена, то число резонансов может сократиться до трех, а то и до одного. Однако при больших  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  или при нелинейных жесткостях упругих элементов подвеса разделение переменных нарушается. Важное практическое значение имеют уравнения (17), соответствующие описанию движения платформы (2) стенда, нагруженной асимметричным объектом (3).

Уравнения (13) могут быть использованы при проектировании калибровочных ЭМВС, в которых должны быть соблюдены соответствующие условия, обеспечиваемые конструкцией стенда и технологией его изготовления.

Заметим, что на рис. 1 изображена реактивная масса 8, соединенная с (2 + 3) пружинами 4, 5 и с корпусом пружинами 6. Колебания реактивной массы, возбуждаемые от колебаний подвижной системы (2 + 3), оказывают через пружины 4, 5 обратное действие на движение (2 + 3). Это действие можно скомпенсировать методом и системой, описанными в работе [4]. Кроме того, в данной работе подчеркнута, что рассмотрение движения (2 + 3) осуществляется на основе искусственного приема, когда принимаются равными нулю внешние силы.

1. *Вибрации* в технике: Справочник. В 6 т. / Под ред. Э.Э. Лавендела. – Москва: Машиностроение, 1981. – Т. 4. – 510 с.
2. *Испытательная техника*: Справочник: В 2-х кн. / Под ред. В. В. Ключева. – Москва: Машиностроение, 1982. – Кн. 1. – 528 с.
3. Божко А. Е., Пермяков В. И., Пушня В. А. Методы проектирования электромеханических вибровозбудителей. – Киев: Наук. думка, 1989. – 206 с.
4. Божко А. Е., Личкатый Е. А. Управляемая виброзащита электромагнитных вибростендов // Пробл. машиностроения. – 2005. – 8, № 2. – С. 39–44.

*Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков  
Харьковская академия инженеров  
городского хозяйства*

*Поступило в редакцию 18.09.2006*