

Член-корреспондент НАН Украины А. Е. Божко

Аргументированная детализация новой концепции о переходных процессах в электрических цепях

The appearance of a section with slowly increasing current in the transient process of an RL circuit is substantiated. The expansion of jump-like input voltages in a series is proposed. The problem concerning the transient processes in electrocircuits is solved on the basis of the new conception.

При исследовании переходных процессов в электрических цепях наблюдается некоторое несоответствие между экспериментальными и теоретическими результатами. Реальный (экспериментальный) переходный процесс, например, электрического тока i в RL электроцепи, где R , L — резистор и индуктивность соответственно, осциллографируется на экране осциллографа в виде кривой 1, изображенной на рис. 1, а, а выведенный теоретически (классическим или операционным методом) переходный процесс тока в той же электроцепи изображается кривой 2 (рис. 1, б). В этих случаях входное постоянное напряжение $U_{\text{вх}}$ включалось в цепь скачком через ключ (механический или электронный (полупроводниковый)), т. е. после включения

$$U_{\text{вх}} = E \cdot 1(t),$$

где

$$1(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ при } t \geq 0 \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{array} \right\} -$$

единичная функция; E — постоянная величина; t — время.

Как видно из рис. 1, разница в кривых 1 и 2 заключается в участке Δt , являющемся зоной медленного нарастания тока i в начале переходного процесса. Такой участок Δt наблюдается в ряде работ, например, в [1]. Возникает вопрос — почему? Ответ может быть следующий. На интервале Δt входное напряжение при включении в цепь встречает реально сопротивление большее, чем R , учитываемое в нахождении тока i по существующей теории. Причем это большое сопротивление, как видно из рис. 1, а, экспоненциально исчезает и после интервала Δt остается в цепи сопротивление R . Из этого факта напрашивается вывод: либо сопротивление в цепи меняется при включении $U_{\text{вх}} = E \cdot 1(t)$ по закону $R + z_0 e^{-\alpha t}$, где α — коэффициент затухания, либо входное напряжение $U_{\text{вх}} = E \cdot 1(t)$ имеет в себе составляющую $U e^{-\alpha t} \cos \omega t$, которая обуславливает появления в цепи $z_0 e^{-\alpha t}$ в виде реактивного сопротивления $e^{-\alpha t} \omega L$, где ω — круговая частота. Появляется еще один вопрос — каким образом возникают эти затухающие компоненты? Ответ можно представить, опираясь на следующие теоретические и экспериментальные результаты исследований.

Представим, что на вход RL цепи одновременно подается полигармоническое напряжение $U_{\text{вх}} = \sum_{k=1}^n U_{ak} \sin \omega_k t$. В этом случае дифференциальное уравнение RL цепи имеет вид

$$\sum_{k=1}^n U_{ak} \sin \omega_k t = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

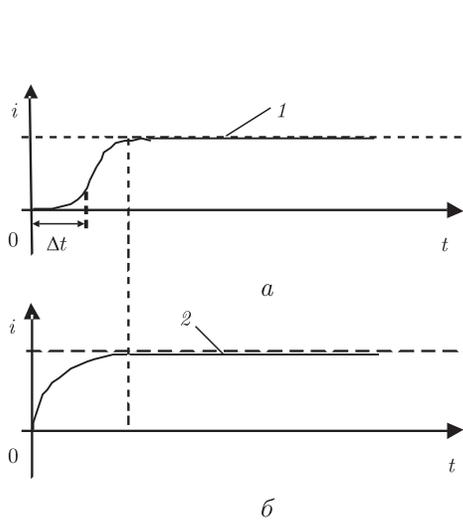


Рис. 1

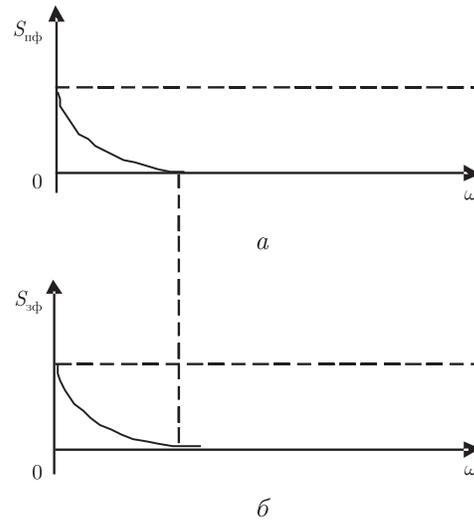


Рис. 2

Считаем, что RL цепь является линейной. Тогда $i = \sum_{k=1}^n i_k$, где i_k — ток k -й гармоники, определяемый из уравнения

$$U_{ak} \sin \omega_k t = Ri_k + L \frac{di_k}{dt}. \quad (1)$$

В результате решения (1) классическим методом получим [2]

$$i_k = \frac{U_{ak}}{\sqrt{R^2 + (\omega_k L)^2}} [\sin(\omega_k t - \varphi_k) + (\sin \varphi_k) e^{-\delta t}], \quad (2)$$

где $\varphi_k = \arctg \frac{\omega_k L}{R}$; $\delta = \frac{R}{L}$ — коэффициент затухания и общий ток

$$i = \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}}{\sqrt{R^2 + (\omega_k L)^2}} [\sin(\omega_k t - \varphi_k) + e^{-\delta t} \sin \varphi_k]. \quad (3)$$

Как видно из (2), токи i_k , $k = \overline{1, n}$, обратно пропорциональны $z_k = \sqrt{R^2 + (\omega_k L)^2}$, а это значит, с учетом (3), ток i , в принципе, обратно пропорционален общему полному сопротивлению цепи

$$z = \frac{\sum_{k=1}^n U_{ak} \sin \omega_k t}{\sum_{k=1}^n \frac{U_{ak} [\sin(\omega_k t - \varphi_k) + e^{-\delta t} \cdot \sin \varphi_k]}{\sqrt{R^2 + (\omega_k L)^2}}},$$

или при $U_{a1} = U_{a2} = \dots = U_{an} = U_a$

$$z = \frac{\sum_{k=1}^n \sin \omega_k t}{\sum_{k=1}^n \frac{\sin(\omega_k t - \varphi_k) + e^{-\delta t} \cdot \sin \varphi_k}{\sqrt{R^2 + (\omega_k L)^2}}}. \quad (4)$$

Из (4) следует, что при $n = 1$

$$z_1 = \frac{\sin \omega_1 t}{\sin(\omega_1 t - \varphi_1)} \sqrt{R^2 + (\omega_1 L)^2}. \quad (5)$$

Сравнивая z из (4) и z_1 из (5), видим, что $z \gg z_1$, т.е. при полигармоническом входном напряжении в RL цепи полное сопротивление увеличивается по сравнению с сопротивлением RL цепи при включении моногармонического напряжения. Этот вывод приводит к мысли, что в реальном переходном процессе в электроцепях с реактивными элементами, в том числе и в RL цепи, временной интервал Δt медленно нарастающего тока i как-то связан с появлением во входном напряжении $U_{\text{вх}} = E \cdot 1(t)$ экспоненциально затухающего ряда гармоник, например, в виде $e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t$. Многократный экспериментальный анализ на анализаторе спектра фирмы “Брюль и Кьер” скачкообразных постоянных напряжений вида $E \cdot 1(t)$ и переменных вида $U_a \cos(\omega t \pm \varphi)$ при $\varphi \neq 0$ показал на осциллограммах наличие экспоненциально затухающих спектров гармоник, соответствующих переднему фронту входного напряжения (рис. 2, а) и заднему фронту (рис. 2, б).

Для переменного входного напряжения при $\varphi \neq 0$ возникает ряд дополнительных гармоник, соответствующих переднему фронту. При $\varphi = 0$ дополнительных гармоник на анализаторе не было видно. Удостоверившись в результате эксперимента, автор решил теоретически обосновать факт разложения $E \cdot 1(t)$ на определенные составляющие, в том числе и на ряд экспоненциально затухающих гармоник. Известно [1–4], что единичная функция $1(t)$, ее производная $d1(t)/dt = \delta(t)$, функции прямоугольной и другой формы могут быть разложены в соответствующий гармонический ряд $\sum_{k=1}^n U_{ak} \sin \omega_k t$, где $U_{ak} \approx U_{a1}/(\pi \omega_k)$, т.е. литературные источники [1, 2, 4, 5] подтверждают возможность представления $E \cdot 1(t)$ в виде ряда гармоник. Эвристически, исходя из экспериментально-теоретического анализа и убеждения в возможности разложения $E \cdot 1(t)$ на составляющие, и с учетом увеличения полного сопротивления RL цепи при входном полигармоническом напряжении, автор представил $E \cdot 1(t)$ и $U_a \sin(\omega t + \varphi)$ при $|\varphi| > 0$ в следующих видах:

$$U_{\text{вх}} = E \cdot 1(t) = E(1 - e^{-\alpha t}) + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t, \quad (6)$$

$$U_{\text{вх}} = U_a \sin(\omega t + \varphi) = U_a(1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \varphi) + e^{-\alpha t} \sin \varphi \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t, \quad (7)$$

где для (6) $\sum_{k=1}^n U_{ak} = E$, для (7) $\sum_{k=1}^n U_{ak} = U_a$, $U_{ak} = U_{a1}/(\pi \omega_k)$, α – коэффициент затухания.

Проверим правильность такого разложения по двум точкам $t = 0$ и $t = \infty$. Для (6) при $t = 0$ $U_{\text{вх}} = E \cdot 1(t)$, при $t = \infty$ $U_{\text{вх}} = E \cdot 1(t)$. Для (7) при $t = 0$ $U_{\text{вх}} = U_a \sin \varphi$, при $t = \infty$ $U_{\text{вх}} = U_a \sin(\omega t + \varphi)$. Данная проверка подтверждает правомочность разложений (6) и (7). Далее обоснуем эти разложения математически. Помощью в объяснении являются рис. 3, а, б, в, г, д.

На рис. 3, а функция f_1 представляет собой прямоугольный импульс с амплитудой E и длительностью τ , а $f_2 = E \cdot 1(t - \tau)$.

На рис. 3, б $f_{11} = Ee^{-\alpha t}$, $f_{12} = E(1 - e^{-\alpha t})$, $t = 0 \div \tau$ при $t > \tau$ $f_{12} = 0$, $f_{11} \approx 0$, причем $f_{11} + f_{12} = f_1 = E$.

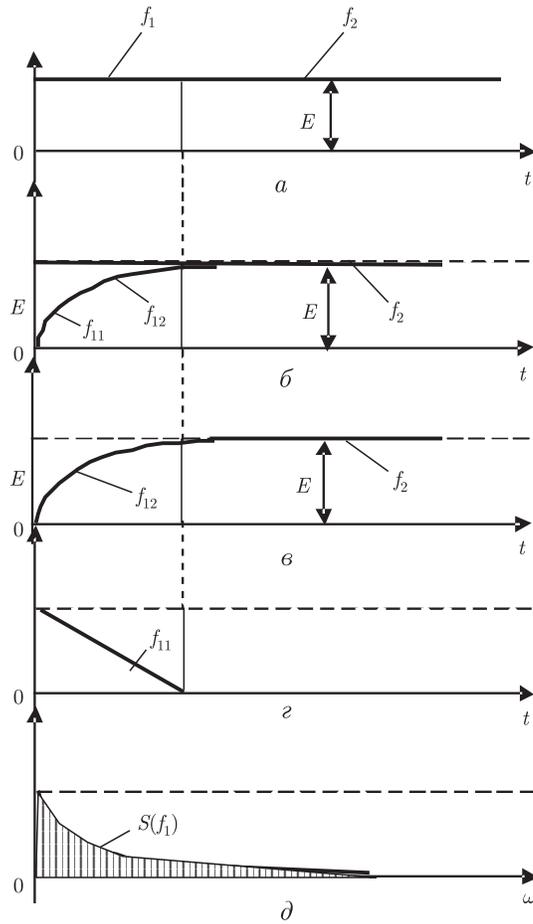


Рис. 3

На рис. 3, в показано сложение функций f_{12} и f_2 . В результате имеем $f_{12} + f_2 = E(1 - e^{-\alpha t})$.

На рис. 3, г осталась функция $f_{11} = Ee^{-\alpha t}$, которую представим в виде $f_{11} = Ee^{-\alpha t} = e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t$, где $\sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t = f_1$, $U_{ak} = U_{a1}/(\pi\omega_k)$, т. е. функция f_{11} заменена эквивалентным экспоненциально затухающим рядом гармоник. Его спектр представлен на рис. 3, д. В каждый момент времени, вплоть до затухания f_1 , этот ряд гармоник присутствует во входном напряжении $U_{\text{вх}}$ электроцепи. Такое обоснование отражает справедливость разложения (6). В разложении (7) берется в качестве гармонического ряда функция

$$U_{a1}(t)e^{-\alpha t} \sin \varphi = e^{-\alpha t} \sin \varphi \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t, \quad U_a = \sum_{k=1}^n U_{ak}; \quad U_{ak} = \frac{U_{a1}}{\pi\omega_k}.$$

Перейдем к определению в RL цепи функций тока i при включении цепи на напряжение (6) и (7). В обоих случаях дифференциальное уравнение этой цепи будет иметь вид $U_{\text{вх}} = Ri + Ldi/dt$. Будем представлять решение последовательно. Вначале для $U_{\text{вх}} = (6)$, а затем $U_{\text{вх}} = (7)$. При включении (6) в RL цепь процесс описывается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} E &= Ri_1 + L \frac{di_1}{dt}, \\ -Ee^{-\alpha t} &= Ri_2 + L \frac{di_2}{dt}, \\ e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t &= Ri_3 + L \frac{di_3}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Так как RL — цепь линейная, то общий ток i в этой цепи при включении ее на напряжение (6) равен сумме всех токов, т. е. $i = i_1 + i_2 + i_3$. Ток $i_3 = \sum_{k=1}^n i_k$, где i_k — ток в RL цепи при действии напряжения $e^{-\alpha t} U_{ak} \cos \omega_k t$, $k = \overline{1, n}$. В результате решения (8) получили [5]

$$i_1 = \frac{E}{R}(1 - e^{-\delta t}), \quad (9)$$

$$i_2 = \frac{E}{R - \alpha L}(e^{-\delta t} - e^{-\alpha t}), \quad (10)$$

$$i_k = \frac{-U_{ak}}{(R - \alpha L)^2 + (\omega_k L)^2} \times \left\{ (R - \alpha L)e^{-\delta t} + e^{-\alpha t} \left[(R - \alpha L) \sin \left(\omega_k t - \frac{\pi}{2} \right) - \omega_k L \cos \left(\omega_k t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

Общий ток i в RL цепи с учетом (9), (10), (11) запишется в виде

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\delta t}) + \frac{E}{R - \alpha L}(e^{-\delta t} - e^{-\alpha t}) - \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}}{(R - \alpha L)^2 + (\omega_k L)^2} \times \left\{ (R - \alpha L)e^{-\delta t} + e^{-\alpha t} \left[(R - \alpha L) \sin \left(\omega_k t - \frac{\pi}{2} \right) - \omega_k L \cos \left(\omega_k t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}; \quad (12)$$

$$\delta = \frac{R}{L}; \quad \alpha \gg \delta.$$

Проверим справедливость (12). При $t = 0$ $i(0) = 0$, при $t = \infty$ $i(\infty) = i = E/R$. Таким образом, считаем, что (12) справедлива.

Количественный расчет по формуле (12) удовлетворяет по форме функцию, изображенную на рис. 1, а.

Далее перейдем к определению тока i в RL цепи при подключении ее к напряжению, описываемому выражением (7). При подключении RL цепи на напряжение (7) дифференциальное уравнение цепи разбивается на систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} U_a \sin(\omega t + \varphi) &= Ri_4 + L \frac{di_4}{dt}, \\ -U_a e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) &= Ri_5 + L \frac{di_5}{dt}, \\ e^{-\alpha t} \sin \varphi \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t &= Ri_6 + L \frac{di_6}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из (13) видно, что общий ток i в RL цепи в этом случае $i = i_4 + i_5 + i_6$, а ток i_6 , в свою очередь, определяется как $i_6 = \sum_{k=1}^n i_{6k}$, где i_{6k} находится в результате решения уравнения

$$e^{-\alpha t} \sin \varphi \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t = Ri_6 + L \frac{di_6}{dt}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (14)$$

В результате решения (13), (14) получим [5]

$$i_4 = \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} [\sin(\omega t + \Psi) - e^{-\delta t} \sin \Psi], \quad (15)$$

где $\Psi = \varphi - \varphi_L$, $\varphi_L = \arctg \frac{\omega L}{R}$;

$$i_5 = \frac{-U_a}{(R - \alpha L)^2 + (\omega L)^2} \times \\ \times \{[(\alpha L - R) \sin \varphi + \omega L \cos \varphi] e^{-\delta t} + e^{-\alpha t} [(R - \alpha L) \sin(\omega t + \varphi) - \omega L \cos(\omega t + \varphi)]\}, \quad (16)$$

$$i_{6k} = \frac{-U_{ak} \sin \varphi}{(R - \alpha L)^2 + (\omega_k L)^2} \times \\ \times \left\{ (R - \alpha L) e^{-\delta t} + e^{-\alpha t} \left[(R - \alpha L) \sin \left(\omega_k t - \frac{\pi}{2} \right) - \omega_k L \cos \left(\omega_k t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}. \quad (17)$$

Общий ток $i = i_4 + i_5 + i_6$ с учетом (15), (16), (17) определяется выражением

$$i = \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} [\sin(\omega t + \Psi) - e^{-\delta t} \sin \Psi] - \\ - \frac{-U_a}{(R - \alpha L)^2 + (\omega L)^2} \{[(\alpha L - R) \sin \varphi + \omega L \cos \varphi] e^{-\delta t} + \\ + e^{-\alpha t} [(R - \alpha L) \sin(\omega t + \varphi) - \omega L \cos(\omega t + \varphi)]\} - \sin \varphi \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}}{(R - \alpha L)^2 + (\omega_k L)^2} \times \\ \times \left\{ (R - \alpha L) e^{-\delta t} + e^{-\alpha t} \left[(R - \alpha L) \sin \left(\omega_k t - \frac{\pi}{2} \right) - \omega_k L \cos \left(\omega_k t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}. \quad (18)$$

Проверим справедливость (18).

$$\text{При } t = 0 \quad i(0) = 0,$$

$$\text{при } t = \infty \quad i(\infty) = \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

Данная проверка подтверждает справедливость формулы (18).

График тока i в цепи RL при подключении ее на напряжение $U_a \sin(\omega t + \varphi)$ в соответствии с формулой (18) изображен на рис. 4, где четко виден интервал медленного нарастания тока i . Необходимо подчеркнуть, что коэффициент затухания α значительно больше

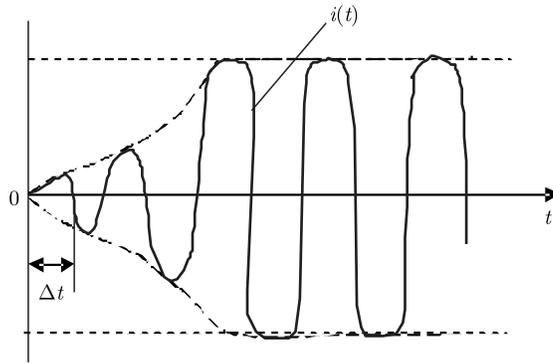


Рис. 4

коэффициента затухания δ . Время Δt медленно нарастающего участка равно примерно $3/\alpha$. При $\alpha = \infty$ формула (6) = $E \cdot 1(t)$, а (7) = $U_a \sin[\omega t + \varphi]$. Соответственно переходный процесс тока i в RL цепи запишется следующим выражениями. Для цепи с входным $E \cdot 1(t)$ $i = (E/R)(1 - e^{-\delta t})$, а для цепи с $U_{\text{вх}} = U_a \sin[\omega t + \varphi]$ $i = (U_a/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2})[\sin(\omega t + \Psi) - e^{-\delta t} \sin \Psi]$, т.е. в этом случае переходный процесс $i(t)$ в RL цепи математически выражается соотношениями, выведенными на основании существующей теории, но здесь $\Delta t = (3 \div 4)/\alpha = 0$. Заметим, что для RC цепей были определены напряжения на емкости при подключении цепи на напряжение (6) и (7). Результаты сходные с результатами для RL цепи, но в них вместо тока i фигурирует напряжение U на емкости C .

Таким образом, проведенные теоретико-экспериментальные исследования переходных процессов электроцепей с реактивными элементами (L, C) с учетом реальных условий явились основанием для формулирования новой концепции о переходных процессах в электроцепях на основе представления скачкообразных входных напряжений постоянного и переменного токов в виде составляющих, представленных в выражениях (6) и (7). Поводом к обоснованию новой концепции послужила выявленная автором автоматическая реструктуризация электрических цепей при полигармонических входных сигналах [6]. Данная работа является существенным развитием работ [7–9].

1. Андре Анго. Математика для электрорадиоинженеров. – Москва: Наука, 1965. – 780 с.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
3. Белецкий А. Ф. Основы теории линейных электрических цепей. – Москва: Связь, 1967. – 608 с.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 736 с.
5. Гинзбург С. Г. Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.
6. Божко А. Е. Об автоматической реструктуризации электроцепей с реактивными элементами при полигармонических входных сигналах // Доп. НАН України. – 2002. – № 11. – С. 101–103.
7. Божко А. Е. К концепции о переходных процессах в электрических цепях // Там же. – 2003. – № 12. – С. 72–75.
8. Божко А. Е. Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Там же. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
9. Божко А. Е. О новой трактовке переходных процессов в электрических цепях // Там же. – 2005. – № 4. – С. 81–86.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 07.11.2005