УДК 517.956.223

О. О. Мурач

Крайова задача для еліптичної за Петровським системи диференціальних рівнянь в уточненій шкалі просторів

(Представлено академіком НАН України Ю. М. Березанським)

We study a boundary-value problem elliptic in the sense of Petrovskii for a system of partial differential equations over a bounded domain. We prove that the operator of the problem is a Fredholm one in a refined scale of functional Hilbert spaces. Elements of this scale are the isotropic spaces of Hörmander–Volevich–Paneyakh.

У роботі вивчається загальна еліптична крайова задача для системи диференціальних рівнянь в обмеженій області евклідового простору з гладкою межею. Відомо [1, с. 58], що ця задача має скінченний індекс в однобічній шкалі соболєвських просторів. Мета роботи — уточнити цей результат щодо більш тонкої шкали гільбертових функціональних просторів. Елементами такої шкали є деякі ізотропні простори Хермандера–Волевича–Панеяха, параметризовані за допомогою двох параметрів: числового та функціонального. Останній повільно змінюється на $+\infty$ в сенсі Карамати. Ця шкала введена та досліджувалась в [2, 3] і названа там уточненою. Вона містить у собі соболєвську шкалу і дозволяє значно тонше охарактеризувати гладкість розподілу по властивостях його перетворення Фур'є.

Ми вважаємо, що система диференціальних рівнянь еліптична за І. Г. Петровським, а крайові диференціальні оператори задовольняють умову Я. Б. Лопатинського. Нами встановлено, що оператор крайової задачі обмежений і фредгольмів (тобто має скінченний індекс) в однобічній уточненій шкалі просторів та породжує в ній набір ізоморфізмів. Отримана також апріорна оцінка та досліджена локальна гладкість розв'язку задачі. Як наслідок, встановлена одна достатня умова класичності розв'язку. Скалярний випадок розглянутий раніше в роботах [2–5], а еліптична за Петровським система на замкненому многовиді — в [6].

Зазначимо, що простори, гладкість в яких задається за допомогою функціональних параметрів (простори узагальненої гладкості), є предметом багатьох досліджень (див., напр., [7–9] та наведену там бібліогр.).

1. Постановка задачі. Нехай Ω — обмежена область в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geqslant 2$, а межа Γ області Ω є нескінченно гладким компактним многовидом розмірності $n-1$ без краю, $\overline{\Omega} := \Omega \bigcup \Gamma$ — замикання області Ω.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{p} A_{j,k} u_k = f_j \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad j = 1, \ldots, p, \tag{1}$$

де розв'язок розуміється в сенсі узагальнених функцій. Тут $p \in \mathbb{N}$, а $A_{j,k}$, де $j, k = 1, \ldots, p$, — скалярні лінійні диференціальні вирази, задані в замкненій області $\overline{\Omega}$. Вираз $A_{j,k}$ має довільний скінченний порядок та нескінченно гладкі комплексні коефіцієнти. Для кожного номера $k = 1, \ldots, p$ покладемо

$$m_k := \max\{\operatorname{ord} A_{j,k} \colon j = 1, \ldots, p\}.$$

Припустимо, що всі $m_k \geqslant 1$.

Пов'яжемо з системою (1) квадратну матрицю порядку p

$$a_0(x,\xi) := (a_{j,k}^{(0)}(x,\xi)), \qquad x \in \overline{\Omega}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тут $a_{j,k}^{(0)}(x,\xi)$ — головний символ диференціального виразу $A_{j,k}$ у випадку, коли $\operatorname{ord} A_{j,k} = m_k$, або $a_{j,k}^{(0)}(x,\xi) \equiv 0$ у випадку, коли $\operatorname{ord} A_{j,k} < m_k$.

Припустимо, що система (1) задовольняє такі дві умови.

Умова 1 еліптичності за І. Г. Петровським. Для довільних точки $x \in \overline{\Omega}$ та вектора $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ справедливо $\det a_0(x,\xi) \neq 0$.

З умови 1 випливає, що для кожного $x \in \overline{\Omega}$ визначник $\det a_0(x,\xi)$ є однорідним поліномом від ξ порядку $m_1 + \cdots + m_p$. Позначимо через $\nu(x)$ одиничний вектор внутрішньої нормалі до межі Γ області Ω в точці $x \in \Gamma$.

Умова 2 правильної еліптичності. Порядок полінома $\det a_0(x,\xi)$ парний, причому для кожної точки $x \in \Gamma$ та для довільного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ в точці x, многочлен $\det a_0(x, \tau + \eta\nu(x))$ має половину комплексних η-коренів (з урахуванням їх кратності) з додатними уявними частинами та половину коренів з від'ємними уявними частинами.

Відомо [1, с. 53], що при $n > 2$ умова 2 є наслідком умови 1. При $n \leqslant 2$ це не так. Позначимо через $2q$, де $q \in \mathbb{N}$, парний порядок полінома $\det a_0(x,\xi)$.

Будемо розглядати такі розв'язки системи (1), які задовольняють крайові умови

$$\sum_{k=1}^{p} B_{j,k} u_k = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad \text{де} \qquad j = 1, \ldots, q. \tag{2}$$

Тут $B_{j,k}$, де $j = 1, \ldots, q$ та $k = 1, \ldots, p$, — скалярні лінійні крайові диференціальні вирази, задані на межі Γ. Вираз $B_{j,k}$ має порядок $\operatorname{ord} B_{j,k} \leqslant m_k - 1$ та нескінченно гладкі комплексні коефіцієнти. Для кожного номера $j = 1, \ldots, q$ покладемо

$$r_j := \min\{m_k - \operatorname{ord} B_{j,k} \colon k = 1, \ldots, p\} \geqslant 1.$$

Отже, $\operatorname{ord} B_{j,k} \leqslant m_k - r_j$ для довільних $j = 1, \ldots, q$ та $k = 1, \ldots, p$.

Пов'яжемо з умовами (2) матрицю розміру $q \times p$

$$b_0(x,\xi) := (b_{j,k}^{(0)}(x,\xi)), \qquad x \in \Gamma, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тут $b_{j,k}^{(0)}(x,\xi)$ — головний символ диференціального виразу $B_{j,k}$ у випадку, коли $\operatorname{ord} B_{j,k} = m_k - r_j$, або $b_{j,k}^{(0)}(x,\xi) \equiv 0$ у випадку, коли $\operatorname{ord} B_{j,k} < m_k - r_j$.

Припустимо також, що виконується

Умова 3 Я. Б. Лопатинського. Для кожної точки $x \in \Gamma$ та для довільного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ в точці x, рядки матриці

$$b_0(x, \tau + \eta\nu(x)) a_0^c(x, \tau + \eta\nu(x))$$

лінійно незалежні як многочлени від комплексної змінної η за модулем многочлена

$$\prod_{j=1}^{q} (\eta - \eta_j^+(x,\tau)).$$

Тут a_0^c — транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці a_0, а $\eta_1^+(x,\tau),\dots,\eta_q^+(x,\tau)$ — всі η-корені многочлена $\det a_0(x,\tau+\eta\nu(x))$, що мають додатну уявну частину.

Таким чином, крайова задача (1), (2) задовольняє умови 1, 2, 3, тобто є [1, с. 53] *еліптичною за І. Г. Петровським*. Запишемо її в матричній формі:

$$Au=f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad Bu=g \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{1), (2}$$

Тут $A:=(A_{j,k})$ — квадратна матриця порядку p, $B:=(B_{j,k})$ — матриця розміру $q\times p$ та $u=\mathrm{col}(u_1,\dots,u_p)$, $f=\mathrm{col}(f_1,\dots,f_p)$, $g=\mathrm{col}(g_1,\dots,g_q)$.

Пов'яжемо з крайовою задачею (1), (2) лінійне відображення

$$u\mapsto(Au,Bu), \qquad u\in(C^\infty(\overline{\Omega}))^p. \tag{3}$$

Наша задача — дослідити продовження за неперервністю відображення (3) в уточнених шкалах функціональних просторів.

2. Уточнені шкали просторів досліджувались в [3]. Наведемо (для зручності читача) їх означення.

Позначимо через $\mathcal{M}$ сукупність усіх таких функцій $\varphi\colon[1,+\infty)\to(0,+\infty)$, що:

а) φ вимірна за Борелем на півосі $[1,+\infty)$;

б) функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1,b]$, де $1<b<+\infty$;

в) функція φ повільно змінна на $+\infty$ у сенсі Карамати, тобто

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)}=1 \qquad \text{для довільного} \qquad \lambda>0.$$

Нехай $s\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{M}$. Позначимо через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ множину всіх таких повільно зростаючих розподілів v, заданих в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, що перетворення Фур'є $\widehat{v}$ розподілу v є локально сумовною за Лебегом в $\mathbb{R}^n$ функцією, яка задовольняє умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2(\langle\xi\rangle)|\widehat{v}(\xi)|^2d\xi<\infty.$$

Тут $\langle\xi\rangle=(1+\xi_1^2+\dots+\xi_n^2)^{1/2}$ — згладжений модуль вектора $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$. У просторі $\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(v_1,v_2)_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}:=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2(\langle\xi\rangle)\widehat{v_1}(\xi)\overline{\widehat{v_2}(\xi)}d\xi.$$

Простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — це окремий ізотропний гільбертів випадок просторів, розглянутих Л. Хермандером [10, с. 54] та Б. П. Волевичем і Л. Р. Панеяхом [11, с. 14]. У випадку $\varphi\equiv1$ простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ збігається з простором Соболєва $H^s(\mathbb{R}^n)$. З включень

$$\bigcup_{\varepsilon>0}H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)=:H^{s+}(\mathbb{R}^n)\subset H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\subset H^{s-}(\mathbb{R}^n):=\bigcap_{\varepsilon>0}H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$$

випливає, что в сім'ї просторів

$$\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon s\in\mathbb{R},\varphi\in\mathcal{M}\} \tag{4}$$

функціональний параметр φ уточнює основну (степеневу) s-гладкість. Ця сім'я називається *уточненою* шкалою в $\mathbb{R}^n$.

Уточнені шкали в області Ω та на межі Γ означаються за допомогою шкали (4) таким чином.

Позначимо через $H^{s,\varphi}(\Omega)$ факторпростір простору $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ по замкненому підпростору

$$\{v \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon\ \operatorname{supp} v \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}. \tag{5}$$

Факторпростір $H^{s,\varphi}(\Omega)$ гільбертів сепарабельний; у ньому скалярний добуток класів суміжності розподілів $v_1, v_2 \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ дорівнює

$$(v_1 - \Pi v_1, v_2 - \Pi v_2)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)},$$

де Π — ортопроектор в $\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ на підпростір (5). Зауважимо, что $H^{s,\varphi}(\Omega)$ природно трактувати як простір звужень в область Ω всіх розподілів $v \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Для такого звуження w маємо

$$\|w\|_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\Omega)} = \inf\{\|v\|_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}\colon v \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \text{ та } v = w \text{ в } \Omega\}.$$

Далі позначимо через $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ простір усіх таких розподілів h на Γ, що

$$(\chi_j h) \circ \alpha_j \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \text{ для кожного } j = 1, \ldots, \rho.$$

Тут $\alpha_j\colon \mathbb{R}^n \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \rho$, — скінченний атлас із C^∞-структури на многовиді Γ; $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \rho$, — розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$; $(\chi_j h) \circ \alpha_j$ — зображення розподілу $\chi_j h$ у локальній карті α_j. У просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(h_1, h_2)_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{\rho}((\chi_j h_1) \circ \alpha_j, (\chi_j h_2) \circ \alpha_j)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Він стандартним чином задає норму. Простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ сепарабельний гільбертів та з точністю до еквівалентності норм не залежить від вибору атласа і розбиття одиниці.

Сім'ї просторів $H^{s,\varphi}(\Omega)$ та $H^{s,\varphi}(\Gamma)$, де $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, утворюють *уточнені* шкали просторів відповідно в області Ω та на межі Γ. Зауважимо, що множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в просторі $H^{s,\varphi}(\Omega)$, а множина $C^\infty(\Gamma)$ щільна в просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$.

Уточнені шкали просторів дозволяють тонше, ніж соболєвська шкала, охарактеризувати гладкість розподілу по властивостях його перетворення Фур'є.

Твердження 1 [10, с. 59; 3]. *Нехай функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ задовольняє умову*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\varphi^2(t)} < \infty. \tag{6}$$

Тоді для довільного цілого $k \geqslant 0$ справедливі компактні вкладення

$$H^{k+n/2,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \qquad \textit{та} \qquad H^{k+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow C^k(\Gamma). \tag{7}$$

Зворотно, якщо виконуєтся принаймі одне з неперервних вкладень (7) *для деякого $\varphi \in \mathcal{M}$ та цілого $k \geqslant 0$, то справедлива нерівність* (6).

3. Основні результати. Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T\colon X \to Y$, де X, Y — банахові простори, називається *фредгольмовим*, якщо його ядро скінченновимірне, область значень $T(X)$ замкнена в Y та є скінченновимірним факторпростір $Y/T(X)$. *Індексом* фредгольмового оператора T називается число $\dim\ker T - \dim(Y/T(X))$.

Позначимо через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ та $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ скалярні добутки в просторах $L_2(\Omega)$ та $L_2(\Gamma)$ відповідно, а також розширення за неперервністю цих скалярних добутків. Покладемо $r := = \min\{r_1, \ldots, r_q\} \geqslant 1$.

Теорема 1. *Нехай $s > -r + 1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Відображення* (3) *продовжується за неперервністю до обмеженого фредгольмового оператора*

$$(A, B)\colon \prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) := (H^{s,\varphi}(\Omega))^p \times \prod_{j=1}^{q} H^{s+r_j-1/2,\varphi}(\Gamma). \tag{8}$$

Ядро N оператора (8) *задовольняє умову $N \subset (C^\infty(\overline{\Omega}))^p$ та не залежить від s, φ. Область значень цього оператора складається з усіх таких вектор-функцій*

$$(f, g) = (\mathrm{col}(f_1, \ldots, f_p), \mathrm{col}(g_1, \ldots, g_q)) \in \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma), \tag{9}$$

що

$$\sum_{j=1}^{p} (f_j, w_j)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (g_j, h_j)_\Gamma = 0$$

для довільної вектор-функції

$$(w_1, \ldots, w_p, h_1, \ldots, h_q) \in N_*.$$

Тут N_* — деякий не залежний від s, φ скінченновимірний підпростір у

$$(C^\infty(\overline{\Omega}))^p \times (C^\infty(\Gamma))^q.$$

Індекс оператора (8) *дорівнює числу* $\dim N - \dim N_*$ *і не залежить від s, φ.*

Теорема 2 (апріорна оцінка). *Нехай $s > -r + 1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Припустимо, що вектор-функція*

$$u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_p) \in \prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Omega) \tag{10}$$

є розв'язком крайової задачі (1), (2), *праві частини якої задовольняють умову* (9). *Тоді існує таке число $c > 0$, не залежне від вектор-функцій u, f, g, що*

$$\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|_{H^{s+m_k,\varphi}(\Omega)} \leqslant c \left(\sum_{j=1}^{p} \|f_j\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{q} \|g_j\|_{H^{s+r_j-1/2,\varphi}(\Gamma)} + \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|_{L_2(\Omega)} \right). \tag{11}$$

Відмітимо, що у випадку тривіального ядра N остання сума в правій частині нерівності (11) відсутня. Згідно з теоремою 1, якщо простори N та N^+ тривіальні, то оператор (8) є топологічним ізоморфізмом. У загальному випадку ізоморфізм зручно задавати за допомогою таких проекторів.

Розглянемо дві прямі суми

$$\prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Omega) = N \dotplus \left\{u - \text{вектор (10)}\colon \sum_{k=1}^{p} (u_k, v_k)_\Gamma = 0 \text{ для довільного } (v_1,\ldots,v_p) \in N\right\},$$

$$\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) = N_* \dotplus (A,B)\left(\prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Omega)\right).$$

Позначимо через P та Q косі проектори відповідно просторів

$$\prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Omega) \qquad \text{та} \qquad \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$$

на другі доданки в цих сумах паралельно N та N_*. Ці проектори не залежать від s, φ.

Теорема 3. *Для довільних* $s > -r + 1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *звуження оператора* (8) *на підпростір* $P\left(\prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Omega)\right)$ *є топологічним ізоморфізмом*

$$(A,B)\colon P\left(\prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Omega)\right) \leftrightarrow Q(\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)).$$

Відзначимо, що у випадку $-r + 1/2 < s < 0$ наведені результати є новими навіть для соболєвської шкали ($\varphi \equiv 1$). У цьому випадку вектор-функція f у крайовій задачі (1), (2) може мати компоненти, що не є регулярними розподілами в області Ω.

4. Застосування. Важливе застосування теорем про розв'язність еліптичних рівнянь — це твердження про підвищення локальної гладкості розв'язку рівняння. (Див. [12, 10] для регулярних розв'язків і [13–15] для узагальнених розв'язків та посилання в цих роботах.)

Нехай U — відкрита непорожня підмножина замкненої області $\overline{\Omega}$. Покладемо $\Omega_0 = U \bigcap \Omega$ та $\Gamma_0 = U \bigcap \Gamma$ (можливий випадок $\Gamma_0 = \varnothing$). Введемо такі локальні аналоги просторів уточнених шкал в Ω і на Γ:

$$H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) = \{v - \text{розподіл в } \Omega\colon \chi v \in H^{s,\varphi}(\Omega) \text{ для всіх } \chi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \bigcup \Gamma_0\},$$

$$H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) = \{h - \text{розподіл на } \Gamma\colon \chi h \in H^{s,\varphi}(\Gamma) \text{ для всіх } \chi \in C^\infty(\Gamma), \operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0\}.$$

Теорема 4. *Нехай* $s \geqslant \sigma > -r + 1/2$ *та* φ, $\psi \in \mathcal{M}$. *Припустимо, що вектор-функція*

$$u = \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_p) \in \prod_{k=1}^{p} H^{\sigma+m_k,\psi}(\Omega) \tag{12}$$

є узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2), *де*

$$f_j \in H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \quad \text{при} \quad j = 1,\ldots,p \quad \text{та} \quad g_j \in H^{s+r_j-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) \quad \text{при} \quad j = 1,\ldots,q.$$

Тоді

$$u_k \in H^{s+m_k,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \qquad \text{при} \qquad k = 1,\ldots,p.$$

Отже, уточнена гладкість φ правих частин задачі (1), (2) успадковується її розв'язком. Зауважимо, що

$$H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\Gamma)=H^{s,\varphi}(\Omega) \qquad \text{та} \qquad H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)=H^{s,\varphi}(\Gamma).$$

Таким чином, теорема 4 містить у собі твердження про підвищення глобальної гладкості розв'язку, тобто на всій замкненій області $\overline{\Omega}$. Відмітимо також випадок $\Gamma_0=\varnothing$, який приводить до твердження про підвищення локальної гладкості в околах внутрішніх точок області.

З теореми 4 та твердження 1 випливає

Теорема 5. *Нехай* $\sigma>-r+1/2$, $\psi\in\mathcal{M}$ *та вектор-функція* (12) *є узагальненим розв'язком крайової задачі* (1), (2), *де*

$$f_j\in H^{n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing)\bigcap H^{-r+n/2,\varphi}(\Omega) \qquad \text{для довільного} \qquad j=1,\ldots,p,$$

$$g_j\in H^{r_j-r+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma) \qquad \text{для довільного} \qquad j=1,\ldots,q,$$

а функціональний параметр $\varphi\in\mathcal{M}$ *задовольняє умову* (6). *Тоді*

$$u_k\in C^{m_k}(\Omega)\bigcap C^{m_k-r}(\overline{\Omega}) \qquad \text{для довільного} \qquad k=1,\ldots,p,$$

тобто розв'язок $u=\mathrm{col}(u_1,\ldots,u_p)$ *задачі є класичним.*

Відзначимо, що для класичного розв'язку u праві частини задачі (1), (2) обчислюються за допомогою класичних частинних похідних функцій $u_1,\ldots,u_p$.

Автор щиро вдячний В. А. Михайлецю та Ю. М. Березанському за обговорення результатів та корисні зауваження.

1. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci., 79. Part. Different. Equat. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1–144.
2. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. I // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 2. – С. 217–235.
3. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Там же. – 2006. – **58**, № 3. – С. 352–370.
4. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двухсторонней уточненной шкале пространств // Там же. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1536–1555.
5. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двухсторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вісн. – 2006. – **3**, № 4. – С. 447–480.
6. *Мурач А. А.* Эллиптические по Петровскому системы дифференциальных уравнений в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 29–35.
7. *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости. – Добавл. к кн.: Х. Трибель. Теория функциональных пространств. – Москва: Мир, 1986. – С. 381–415.
8. *Haroske D. D., Moura S. D.* Continuity envelopes of spaces of generalised smoothness, entropy and approximation numbers // J. Approxim. Theory. – 2004. – **128**. – P. 151–174.
9. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisation of function spaces of generalised smoothness // Ann. mat. pura ed appl. – 2006. – **185**, No 1. – P. 1–62.
10. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.
11. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.
12. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 206 с.

13. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 4. – С. 745–748.
14. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка., 1965. – 800 с.
15. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 427 p.

Институт математики НАН Украины, Киев
Черниговский государственный технологический университет

Поступило в редакцию 15.11.2006